JOHANNES KEPLER
UNIVERSITÄT LINZ

Eingereicht von
Michaela Schwinghammer

Angefertigt am
Abteilung für MINT Didaktik

Beurteiler / Beurteilerin
Univ. Prof. DI Mag. Dr. Dr.h.c. Markus Hohenwarter

Mitbetreuung
Univ.-Prof.[in] MMag.[a] Dr.[in] Barbara Sabitzer

Juli 2022

BEGABTEN-FÖRDERUNG IM MINT-BEREICH

DER MINI TALENTE CLUB

Diplomarbeit
zur Erlangung des akademischen Grades

Magistra der Naturwissenschaften
im Diplomstudium

Lehramtsstudium Mathematik und Chemie

**JOHANNES KEPLER
UNIVERSITÄT LINZ**
Altenberger Straße 69
4040 Linz, Österreich
jku.at
DVR 0093696

ZUSAMMENFASSUNG

Die vorliegende Diplomarbeit beschäftigt sich mit der Frage, inwieweit Inhalte der Sekundarstufe I mit Hochbegabten der Primarstufe umsetzbar sind. Untersucht wird dabei der Mini Talente Club, bei dem sich begabte Kinder treffen und in acht Terminen an der Johannes Kepler Universität (JKU) Inhalte aus dem MINT-Bereich erarbeiten.

Die Thematik Hochbegabung ist sehr umfangreich, wodurch zu Beginn im theoretischen Teil Hochbegabung sowie verschiedene Modelle der Begabungen näher definiert werden. Im Weiteren werden mögliche Formen der Hochbegabtenförderung vorgestellt. Insbesondere wird dabei auf die Förderung im MINT-Bereich in Oberösterreich eingegangen. Folgend wird das Konzept des Mini Talente Club vorgestellt und einige Methoden, die im Club Verwendung finden, werden eingeführt.

Im empirisch-praktischen Teil wird die Durchführung, mathematische Theorie, die Zielsetzungen und die Methoden zu zwei Workshops aus dem Mini Talente Clubs vorgestellt. Im Rahmen eines Clubs wurde dieser und der mathematische Teil evaluiert und ausgewertet. Dabei konnte bestätigt werden, dass Inhalte der Sekundarstufe I bereits mit Hochbegabten der Primarstufe umsetzbar sind. Jedoch ist ein höherer individueller Betreuungsaufwand notwendig, um die Inhalte verständlicher zu machen.

Diese Arbeit soll einen Eindruck vermitteln, inwieweit die Förderung hochbegabter Volksschulkinder im Rahmen eines Pull-Out-Programms möglich ist. Durch weitere Forschung können die anderen MINT-Teilbereiche des Clubs untersucht werden. Außerdem wäre eine Forschung in Richtung Mädchen-Förderung im MINT-Bereich sehr erstrebenswert.

ABSTRACT

This thesis aims to answer whether or not it is possible to teach secondary school-grade content to gifted students of elementary school age. The main object of study is the “Mini Talente Club” at the Johannes Kepler University Linz (JKU), where gifted students were instructed in STEM topics throughout eight sessions.

Giftedness is a vast topic. Therefore the theoretical part at the beginning of the thesis introduces different models which further define giftedness. Possible ways to foster talents are introduced, subsequently. Particular focus is given to STEM-promoting programs in Upper Austria. Then, the “Mini Talente Club’s” theoretical concept is explained, and the teaching methodologies applied in the club are presented.

The practical part focuses on the execution, mathematical theory, objectives, and teaching methodology of two workshops conducted in the “Mini Talente Club”. Over the course of one semester, the club was evaluated using questionnaires, focusing on the mathematical part. The analysis of the data suggests that it is possible to teach secondary-grade material to gifted elementary school attendees. However, additional effort is required to make the material easier to comprehend.

This diploma thesis aims to show how fostering gifted elementary school kids is possible within a “Pull-Out-Program” framework. Further research may focus on different aspects of STEM topics, apart from mathematics, and further research may investigate the promotion of girls in a STEM environment.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

1.1. Motivation

Fördern und Fordern ist aus der heutigen Zeit im Bildungsbereich kaum mehr wegzudenken. Besonders wichtig ist dabei, jedem Kind eine Chance eine begabungsfreundliche Lernumgebung zu bieten, um sich stärken- und interessenorientiert weiterentwickeln zu können. Dabei ist das Ziel, die Entwicklung der Potenziale von Kindern und Jugendlichen bestmöglich zu unterstützen. Es gilt die Begabungsförderung für alle so zu gestalten, dass sie an ihre persönlichen Leitungshöchstgrenzen herankommen können und dabei bereits vom kindlichen Alter bis hin zum Erwachsenwerden Unterstützung erfahren.

Frühe Förderung ist für die Vernetzung im Gehirn und damit für die Entwicklung von Lernprozessen sehr wichtig. Besonders im jungen Alter reagiert das Gehirn auf jede Stimulation durch die Umwelt und ist sehr schnell an die Gegebenheiten anpassungsfähig. Werden Potenziale nicht früh genug geweckt, stimuliert und gefördert, kommt es zu einer Verkümmerung oder diese werden erst gar nicht ausgebildet. Eine Überforderung ist stets zu vermeiden, da Kinder von Grund auf neugierig und wissbegierig sind und sich selbst Aufgaben suchen, an denen sie wachsen können. Zu einer guten Förderung der Potenziale gehört neben dem Umfeld und einer förderlichen Lehr- und Lernstruktur auch die soziale Zugehörigkeit in der Gruppe.

Durch meine Arbeit am JKU COOL Lab bin ich seit seiner Gründung durch die Kooperation mit Talente Oberösterreich mit begabten Kindern in Kontakt. Bereits zu Beginn meiner Tätigkeit war ich sehr begeistert von den talentierten Kindern und ihren individuellen Begabungen, weswegen mein Interesse diesbezüglich verstärkt wurde und ich mehr über die Förderung von Begabungen wissen wollte.
Aus dem Talente Club, welcher für Schüler*innen der Sekundarstufe I bereits für Hochbegabte am JKU COOL Lab angeboten wurde, entstand die Idee, auch für Kinder der Primarstufe eine Fördermöglichkeit im MINT-Bereich zu ermöglichen und anzubieten. Die durch meine Tätigkeit gewonnenen Erfahrungen mit den Kindern veranlassten mich, mich mit dieser Thematik genauer auseinanderzusetzen und diese Arbeit zu verfassen.

1.2. Ziele und Forschungsfrage

Ziel dieser Arbeit ist es, zu untersuchen, inwieweit mathematische Lerninhalte der Sekundarstufe I mit Hochbegabten der Primarstufe bearbeitet werden können.

Auf Basis der Grundlagen der Hochbegabtenforschung werden Inhalte der Sekundarstufe I aufbereitet und mit den Teilnehmer*innen des Mini Talente Clubs umgesetzt. Es wird dabei der Fokus auf die Umsetzbarkeit der Inhalte mit der Gruppe der Hochbegabten gelegt.

Im Zuge dessen ist es ein weiteres Ziel, Workshops aufzubereiten und geeignete Methoden für die Umsetzung der Arbeitsaufträge zu verwenden. Zu Beginn wird eine Befragung mittels Fragebogen aller Teilnehmer*innen zu den Erwartungen an den Club und den enthaltenen mathematischen Workshops gestellt. Am Ende des Clubs findet eine weitere Befragung statt. Dabei soll die Meinung der Teilnehmer*innen zu den bearbeiteten Themen aufgezeigt, ausgewertet und analysiert werden.

Im Rahmen dieser Arbeit sollen explizit folgende Forschungsfragen geklärt werden:

- Inwieweit sind Inhalte der Sekundarstufe I mit Hochbegabten der Primarstufe umsetzbar?
- Wie gut und mit welchen Inhaltsbereichen lassen sich Arbeitsaufträge mit Hochbegabten der Primarstufe umsetzen?

1.3. Aufbau der Arbeit

Zu Beginn der Arbeit wird die Hochbegabung definiert, allgemeine Forschungsergebnisse präsentiert und im Besonderen auf Förderformen hochbegabter Kinder und Jugendlicher eingegangen. Darin findet sich auch eine Beschreibung, welche Förderangebote die JKU Linz für Hochbegabte bietet.

Der Mini Talente Club bietet den Teilnehmer*innen einen Einblick ins Universitätsleben. Selbständiges Forschen und (Er-)Lernen neuer Inhalte aus dem MINT-Bereich stehen im Vordergrund. Dies bildet den Kern der Arbeit.
In den nachfolgenden Kapiteln werden je drei Workshops aus dem Club präsentiert. Diese Workshops behandeln Themen aus der Mathematik, aufbereitet für die

Sekundarstufe I. Im Besonderen werden Fermi-Aufgaben aus der Modellierung und aus der Zahlentheorie am Beispiel des Sieb des Eratosthenes die Primzahlen behandelt. Die Themen wurden nach eigenem Interesse und der Durchführbarkeit mit begabten Volksschulkindern gewählt.

Den Abschluss der Arbeit stellt die Befragung der Teilnehmer*innen dar. Damit soll analysiert werden, inwieweit die Inhalte des Clubs mit den Begabten durchführbar waren. Weiters sollen hier auch die verwendeten Methoden reflektiert und eventuelle Verbesserungen vorgeschlagen werden.

2. Grundlagen zur Hochbegabung

In der Literatur finden sich unzählige wissenschaftliche Erklärungen zur folgenden Thematik. In diesem Kapitel wird eine Einführung in das Thema „Hochbegabung" mittels Definition und anschließender Vorstellung einiger bekannten Modelle der Hochbegabung gegeben. Ein Überblick zur Diagnostik der Hochbegabung schließt das Kapitel ab.

2.1. Definition der Hochbegabung

Es gibt eine Vielzahl an allgemeingültigen Definitionen der Hochbegabung. Diese Definitionsvielfalt begründet sich in der Anzahl an möglichen Zugängen. Die Hochbegabung ist durch die theoretische Begriffsbildung nicht direkt beobachtbar. Vielmehr muss Hochbegabung aus zahlreichen Beobachtungen, wie sich das Verhalten einer Person in bestimmten Situationen darstellt (z.B. Leistungssituationen mit genau definierbaren Kriterien für erfolgreiches Handeln), ermittelt werden. (vgl. Preckel & Vock, 2013, S. 18)

Bereits Konfuzius als auch Platon nannten Kinder, die heute als begabt bezeichnet werden würden, als „himmlische Kinder". Sie glaubten, dass die Kinder durch ihre hohe kognitive Leistung von göttlicher Abstammung sein müssten. (vgl. Ziegler, 2018, S. 9) Im Laufe der Zeit veränderte sich der Begriff Hochbegabung bzw. Talent mehrmals. Erst der Philosoph Paracelsus benutzte 1537 den Begriff „Talent" in Bezug auf die geistige Fähigkeit, die einer Person verhilft, ein Ziel zu erreichen. Im Mittelalter wurde der Begriff weiterentwickelt und in Zusammenhang mit hoher Intelligenz gebracht. Erst im 20. Jahrhundert wurde die Begabung bzw. Hochbegabung durch die Begriffe Talente und Kreativität erweitert. Diese Erweiterung ließ eine breitgefächerte Definition zu. (vgl. Ziegler, 2018, S. 10ff)
In der Wissenschaft begann die Begabungsforschung, also die Forschung nach persönlichen Voraussetzungen für die Leistungsexzellenz, in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts. Es wurden Faktoren für die Unterscheidung des Leistungspotentials gesucht. Durch die vorherrschenden unbewussten Vorurteile und Stereotype, welche die Gesellschaft gegenüber hochbegabten Menschen besitzt, war es schwer, gemeinsame Kriterien zu finden. (vgl. Preckel & Vock, 2013, S. 12f)

Dennoch versuchte Sir Francis Galton, Kriterien für die Intelligenzunterschiede aufzustellen, wodurch die wohl älteste Definition von Begabung entstand: die Intelligenz- bzw. Intelligenz-Quotient-Definition, die auch heute noch in Forschung und Praxis ihre Anwendung findet. (vgl. Preckel & Vock, 2013, S. 20f)

2.2. Hochbegabungsmodelle

Folgend werden einige der wichtigsten Begabungsmodelle im Forschungsgebiet der Begabungsforschung näher erläutert. In der Literatur finden sich noch eine Vielzahl anderer Modelle namhafter Expert*innen, die den Rahmen dieser Arbeit sprengen würden.
Hochbegabung geht über den Faktor Intelligenz hinaus. Daher wurden zum Verständnis und der Veranschaulichung aller Einflussfaktoren Modelle geschaffen, wobei die Literatur neben den eindimensionalen und mehrdimensionalen Definitionen der Begabung bzw. Hochbegabung, auch in Kompetenz-, Performanz- und Post-hoc-Definitionen unterscheidet.

2.2.1. Drei-Ring-Modell von Renzulli

In den 1970er Jahren stellte der Amerikaner Joseph Renzulli mit dem Drei-Ring-Modell ein erstes mehrdimensionales Hochbegabungsmodell vor. Durch die Veröffentlichung dieses dynamischen Begabungskonzepts erreichte er einen Durchbruch in der Begabungsforschung. (vgl. Preckel & Vock, 2013, S. 21ff) Renzulli postulierte, Hochbegabung sei als Schnittmenge folgender drei Merkmale zu verstehen (vgl. Abbildung 1: Drei-Ring-Modell nach Renzulli):

- **Überdurchschnittliche intellektuelle Fähigkeiten**
  umfassen neben allgemeinen Fähigkeiten, wie schneller Zugang und Verarbeitung von Informationen, ein hohes Niveau im Schlussfolgern und abstrakten Denken, der Raumvorstellung, dem Erinnern, sprachlicher Gewandtheit sowie eine gute Anpassungsfähigkeit in unterschiedlichen Situationen.
- **Motivation**
  ist die Fähigkeit, sich intensiv und langfristig mit einem Problem zu befassen und auch Selbst- und Fremdkritik während der Bearbeitung einzubringen.

- **Kreativität**
  wird als bestimmte Art des Problemlösevorgangs gesehen, die sich durch flexibles, originelles und selbständiges Denken und das Erlangen neuer Erfahrungen, die durch Neuerungen im Denken und Handeln, auszeichnet.

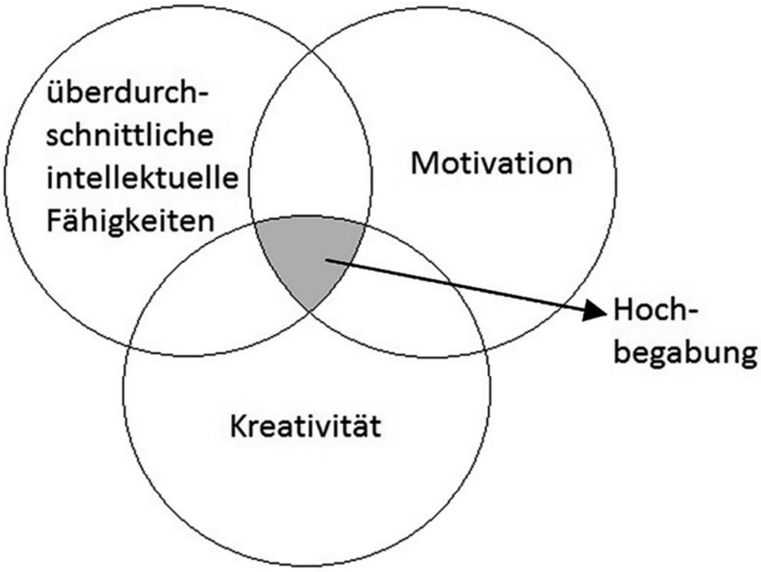


Abbildung 1: Drei-Ring-Modell nach Renzulli (Bardy & Bardy, 2020, S. 27)

Nach diesem Modell müssen alle drei Faktoren zusammenwirken, damit eine Person hochbegabtes Verhalten entwickelt; diese ist nicht angeboren. (vgl. Bardy & Bardy, 2020, S. 26f)

Das Drei-Ring-Modell von Renzulli und die Erweiterung durch Mönks (siehe 2.2.2. Mehr-Faktoren-Modell nach Mönks) beschreiben die Entstehung von Hochbegabung durch ein gemeinsames Interagieren aller genannten Bereiche. Voraussetzung dafür ist eine überdurchschnittliche intellektuelle Fähigkeit, welche sich vor allem in Intelligenztests feststellen lässt. (vgl. Bardy & Bardy, 2020, S. 27)
Ein Problem, welches in der Literatur erwähnt wird, ist, dass die Modelle von Mönks und Renzulli nicht empirisch geprüft werden können. Es ist außerdem unklar, wie die unterschiedlichen Merkmale zu gewichten sind, wenn Hochbegabung diagnostiziert werden soll. (vgl. Bardy & Bardy, 2020, S. 28; Preckel & Vock, 2013, S. 22f)

2.2.2. Mehr-Faktoren-Modell nach Mönks

Mönks entwickelte Anfang der 1990er Jahre das Modell von Renzulli zum „Triadischen Interdependenzmodell der Hochbegabung" weiter. Es basiert genauso auf den drei Persönlichkeitsmerkmalen Intelligenz, Kreativität und Motivation, welche durch den Schnitt dieser Faktoren dargestellt wird, und wird durch den Faktor Umfeld, in dem sich die hochbegabte Person befindet, erweitert. Das Umfeld wird dabei als Zusammenspiel von Familie, Schule und Peers definiert.

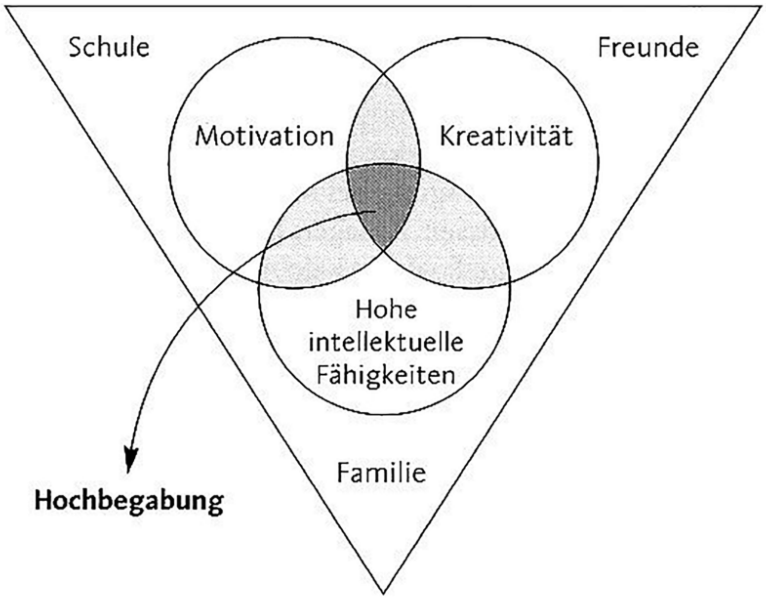


Abbildung 2: Mehr-Faktoren-Modell der Hochbegabung nach Mönks (Bardy & Bardy, 2020, S. 29)

Es ist entscheidend, wie die Anlagen und Bedürfnisse einer hochbegabten Person mit der Umwelt interagieren. Die Komponente „soziale Kompetenz" ist daher von hoher Bedeutung, wird aber in Mönks Modell nicht explizit erwähnt. (vgl. Bardy & Bardy, 2020, S. 29)

Wie auch im Modell von Renzulli fehlen auch bei diesem Modell Evaluationsstudien. Weiteres muss der Faktor Kreativität, genau wie im Drei-Ring-Modell, kritisch betrachtet werden, da keine Messverfahren dafür existieren. Ziegler äußert außerdem noch Kritik an der Überschneidungsfreiheit der Variablen, da Peers beispielsweise auch die gleiche Schule besuchen können. (vgl. Ziegler, 2018, S. 57f)

2.2.3. Differenziertes Hochbegabungsmodell nach Gagné

Der kanadische Forscher Françoys Gagné unterscheidet in seinem dynamischen Modell zwischen Begabung („giftedness“) und Talent („talent“). Unter dem Begriff „giftedness“ versteht Gagné jene Begabungsbereiche, die angeboren sind, jedoch durch Stimulation und Förderung weiterentwickelt werden können. „Talent“ fasst Gagné als systematisch entwickelte Fähigkeit von Personen auf, die sie zu Expert*innen auf einem bestimmten Gebiet machen. Je nach Vielfalt der Begabungen können auch die Gebiete der ausgeprägten Talente variieren. Ob solche Talente entstehen, hängt von den „Katalysatoren“ ab, welche stimulierend oder inhibierend auf die Entwicklung einwirken. (vgl. Bardy & Bardy, 2020, S. 30f)
Kreativität ist, anders als bei Renzulli, ein Begabungsbereich und wird durch kognitive Fähigkeiten, sozioaffektive Fähigkeiten und sensomotorische Fähigkeiten ergänzt. Wichtig dabei ist, dass Gagné selbst diese Aufzählungen als unvollständig und erweiterbar ansieht. Damit sich also eine Begabung zu Talent entwickelt, muss gelernt, geübt und trainiert werden, was von der Person selbst (u.a. Einstellung, Interesse) und der Umwelt der Person (u.a. Schule, Familie) abhängt. Als Zufälle bezeichnet Gagné z.B. Personen zur richtigen Zeit kennen zu lernen, was die Leistungsentwicklung maßgeblich beeinflussen kann. (vgl. Preckel & Vock, 2013, S. 23ff)

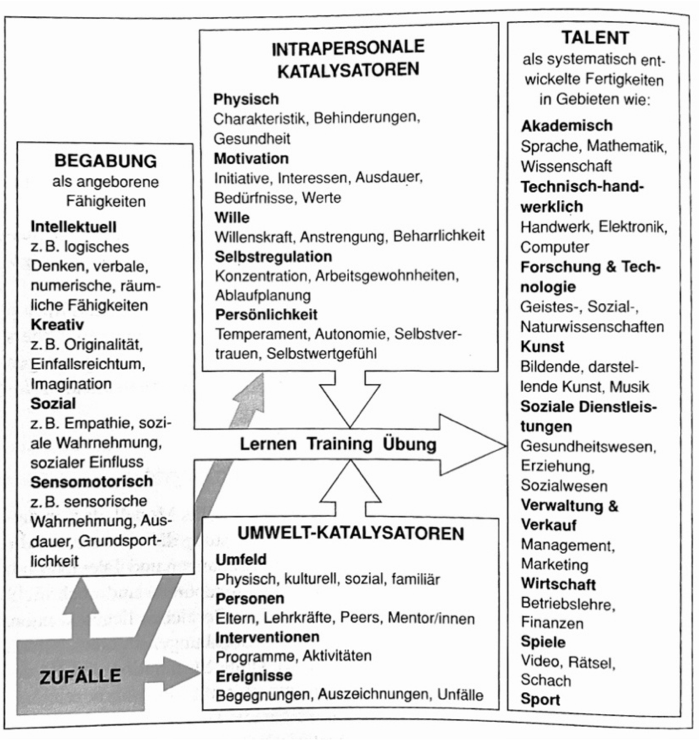


Abbildung 3: differenziertes Hochbegabungsmodell nach Gagné (Preckel & Vock, 2013, S. 24)

Eine wichtige Eigenschaft dieses Modells ist die Interaktivität, wodurch jede Variable im Modell andere wiederum beeinflussen und von ihnen beeinflusst werden können. (vgl. Bardy & Bardy, 2020, S. 30f)

2.2.4. Münchner Hochbegabungsmodell

Eines der weltweit einflussreichsten Modelle, das sich auch auf das Verhältnis von Kreativität, Intelligenz, Umwelt und Begabung bezieht, ist das Münchner Hochbegabungsmodell der Professoren Kurt A. Heller und C. Perletz.
Dieses mehrdimensionale Konzept basiert auf jenem von Gagné und fasst Hochbegabung als individuelle kognitive, motivationale und soziale Möglichkeit auf.

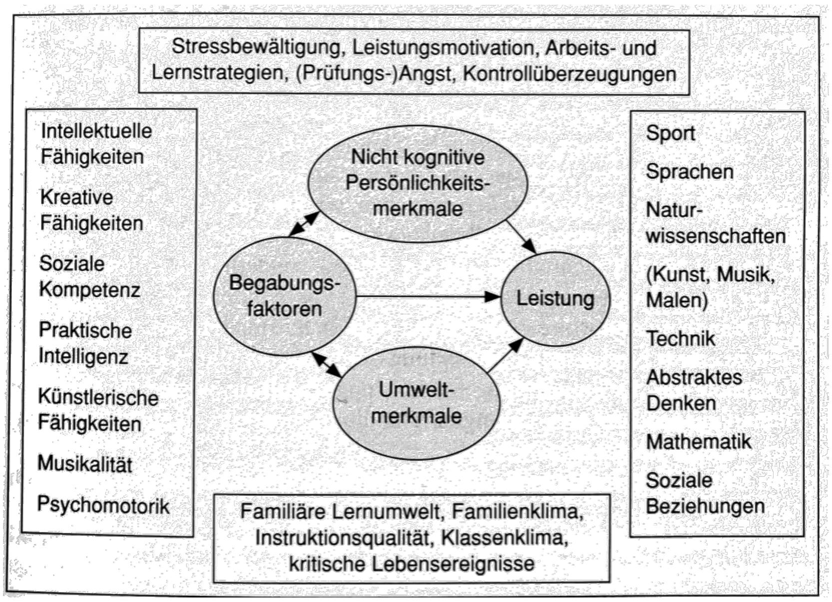


Abbildung 4: Münchner Hochbegabungsmodell von Heller et al. (Preckel & Vock, 2013, S. 25)

Genauso wie bei Gagné wird auch beim Münchner Hochbegabungsmodell zwischen Begabungsfaktoren oder Fähigkeitsdimensionen auf der einen Seite und den Leistungsbereichen auf der anderen Seite differenziert. Der Talente- bzw. Begabungsbegriff wird durch das Wort Leistung ersetzt. „Intrapersonale Katalysatoren“ heißen „nicht kognitive Persönlichkeitsmerkmale“, während „Umweltkatalysatoren“ als „Umweltmerkmale“ bezeichnet werden. Sowohl das Modell von Gagné als auch das Münchner Hochbegabungsmodell verdeutlichen den Prozess der Leistungsentwicklung als komplexen Entwicklungsprozess, bei dem immer

Ursachenbündel und deren Interaktionen berücksichtigt werden müssen. Das heißt, die Begabungsfaktoren stehen in wechselseitiger Beziehung zu den Umweltmerkmalen bzw. den nicht kognitiven Persönlichkeitsmerkmalen. (vgl. Preckel & Vock, 2013, S. 23ff)

Heller und Perleth definieren die Umweltmerkmale als Lernumwelt und Klima innerhalb der Familie, aber auch die soziale Situation in der Schule nimmt einen nicht unbedeutenden Einfluss darauf. Ebenso zählen kritische Lebensereignisse, die Einfluss auf die Entwicklung begabter Kinder nehmen, zu den Umweltmerkmalen. (vgl. Bardy & Bardy, 2020, S. 30f)

Es ist also bei diesem Modell möglich, Menschen, bei denen sich das Potenzial nicht in herausragenden Leistungen zeigt, als hochbegabt identifizieren zu können. Trotz folgender Kritikpunkte ist unbestritten, dass dieses Begabungsmodell als weltweit führendes Modell gilt.

Es ist kritisch zu betrachten, dass nach wie vor die intellektuellen Fähigkeiten durch einen IQ-Test erhoben werden. Weiters sind im Modell viele Variablen verankert, die bisweilen wissenschaftlich noch mangelnd belegt sind. Statt statischer Eigenschaften ist es laut Expertisenforschung besser, den Prozess, insbesondere den Lernprozess, als Variable zu verwenden. Ein weiterer kritischer Punkt ist, dass das Münchner Begabungsmodell individuumszentriert ist. Zudem ist das Zusammenspiel der Faktoren in diesem Modell unklar: Es gilt zu klären, in welcher Form bzw. in welcher Richtung Wechselwirkungen auftreten. (vgl. Ziegler, 2018, S. 57f)

2.3. Diagnostik

Wie bereits aus der Definition der Hochbegabung hervorging, gibt es in der Begabtenforschung mehrere Modellvorstellungen von Hochbegabung. Es folgen daraus unterschiedliche Vorgehensweisen zum Erkennen von Hochbegabten, da immer eine bestimmte Modellvorstellung der Hochbegabung dafür zugrunde liegen muss. Auch Förderkonzepte spielen bei der Strategie der Diagnose eine wesentliche Rolle. Aus diesen genannten Gründen gibt es nicht EINE diagnostische Vorgehensweise. Viel mehr müssen die Kriterien je nach Begabungsmodell spezifisch definiert werden.

Wird eine hohe Begabung bei einem Kind vermutet, werden Ermittlungsprozesse zur Identifikation dieser Begabung herangezogen. Dies geschieht im Allgemeinen mittels unterschiedlicher Tests. Diese Verfahren wurden in den letzten Jahren weiterentwickelt, da durch den Intelligenztest hauptsächlich kognitive Komponenten aufgezeigt werden. Faktoren wie Kreativität und Problemlösen lässt diese Form der Testung außer Acht. (vgl. Preckel & Vock, 2013, S. 98)

In der Zeit der „reinen“ Intelligenztests konnten Hochbegabte, welche nicht erwartungsgemäß ihr volles Potenzial ausschöpften, so genannte Underachiever, nicht identifiziert werden. Das Phänomen „Underachievement“ läutete in der Hochbegabungsdiagnostik ein Umdenken ein, woraufhin in den 1970er Jahren nach Verfahren gesucht wurde, die einerseits auf die Leistungsentwicklung und andererseits auch auf die persönlichkeitsbezogenen Merkmale fokussierten. (vgl. Ziegler, 2018, S. 70; Lack, 2009)

Unabhängig vom gewählten Hochbegabungsmodell ist stets die Intelligenz das Kernkonstrukt, weshalb die Intelligenzdiagnostik in der Hochbegabtendiagnostik eine ganz wesentliche Rolle spielt. Abgesehen davon werden in der Praxis auch Leistungsdaten aus der Schule bzw. dem Kindergarten, Beobachtungen zu Motivation, Kreativität, Selbstkonzept, sowie dem Lern- und Lebensumfeld (Familie, Kindergarten, Schule, Konflikte, Unterstützung,...) für eine möglichst genaue Diagnose eingesetzt. (vgl. Preckel & Vock, 2013, S. 98)

2.3.1. Verfahren zur Identifikation

Zur Identifikation Hochbegabter können objektive oder subjektive Verfahren verwendet werden. Dabei versteht man unter objektiven Verfahren Tests oder testähnliche Situationen, bei denen an allen Getesteten die gleichen Bedingungen gestellt werden. Die erzielten Testergebnisse können sowohl untereinander als auch mit einer Bezugsnorm verglichen werden. Demgegenüber stehen subjektive Verfahren, die sich verstärkt mit individuellen Einschätzungen und Meinungen auseinandersetzen und als weniger zuverlässig gelten. (vgl. Lack, 2009, S. 109f)

Intelligenzdiagnostik

Wie bereits oben beschrieben, ist Intelligenz in nahezu allen Begabungsmodellen enthalten. Daher bildet die Intelligenzdiagnostik den Kern der Hochbegabtendiagnostik. Ähnlich wie bei der Definition der Hochbegabung gibt es auch zur Intelligenz ein Potpourri an Definitionen. Forscher*innen sind sich jedoch einig, dass Intelligenz „höhere Denkprozesse“, wie die Fähigkeit zum schlussfolgernden Denken oder die Abstraktionsfähigkeit, bezeichnet. Es gibt zahlreiche Studien, die besagen, dass Intelligenz ein Marker für schulischen und beruflichen Erfolg ist. Dem ist nicht so, da diese Erfolge von weiteren Merkmalen wie der Unterrichtsqualität und der Förderung im Elternhaus beeinflusst werden. (vgl. Preckel & Vock, 2013, S. 28)

Testverfahren stellen immer nur einen Aspekt der Intelligenz dar, jedoch umfassen sie niemals die gesamte Bandbreite der Intelligenz. Des Weiteren enthält ein Intelligenztest nur eine Momentaufnahme, welche sich im Laufe der Entwicklung noch mehr oder weniger verändern kann. (vgl. Preckel & Vock, 2013, S. 101)

Intelligenztests unterliegen verschiedenen Gütekriterien, um eine valide Aussage treffen zu können. Dazu zählen die Objektivität (Unabhängigkeit vom jeweiligen Testleiter), die Reliabilität (wiederholte Messungen bei der gleichen Person führen zu möglichst gleichen Ergebnissen), die Validität (Grad der Genauigkeit für ein gemessenes Merkmal) und die Normierung (Relation der Ergebnisse zu aktuellen und repräsentativen Bezugsstichproben), welche auf aktuelle und repräsentative Stichproben zurückgreifen muss. (vgl. Lack, 2009, S. 110)

Je nach zugrundeliegender Definition der Intelligenz werden die Tests in Unterkategorien eingeteilt (z.B. Gedächtnis, Wortschatz und logisches Denken). Pro Unterkategorie wird ein Wert ermittelt, welcher mit den anderen ein Gesamtergebnis liefert. Dieses Testergebnis, welches einen Durchschnittswert über alle Unterkategorien darstellt, wird mit dem IQ (Intelligenzquotienten) angegeben. Je nach Durchführung können Intelligenztests als Einzeltest durch ein Interview des Testleiters mit dem/der Proband*in oder als Gruppentest in schriftlicher Form durchgeführt werden. In beiden Fällen gelten genaue Zeitvorgaben. (vgl. Lack, 2009, S. 111)

Es ist dabei kritisch zu erwähnen, dass Extremfälle bei den Ergebnissen (z.B. sehr schlechte Ergebnisse und überdurchschnittliche Ergebnisse in verschiedenen Untertests des/der gleichen Proband*in) eventuell zu einem durchschnittlichen IQ führen können, wodurch sich die Aussagekraft des IQs stark schmälert. (vgl. Lack, 2009, S. 111)

Weiteres kommt es bei Intelligenztests oft zum sogenannten Deckeneffekt. Dieser Effekt beschreibt, wenn die Testpersonen den maximalen Testwert erreichen und kommt meist durch den Mangel an ausreichend schwierigen Aufgaben zustande. Die Hochbegabten lösen die meisten oder auch alle Aufgaben richtig und stoßen damit im wahrsten Sinne des Wortes „an die Decke“ des Testverfahrens. Durch die Verwendung schwierigerer Aufgabenstellungen kann dieser Effekt verhindert werden (z.B. Verwendung von Aufgaben für ältere Testpersonen bzw. Testgruppen). (vgl. Preckel & Vock, 2013, S. 102)

Schulleistungsdiagnostik

In der Schulleistungsdiagnostik wird vorhandenes Wissen von Schüler*innen zu bestimmten Lehrplan- oder Unterrichtsinhalten mittels eines Schulleistungstests überprüft. Das Ergebnis solcher Tests hängt von Variablen, wie den Unterrichtsinhalten, der Lehrperson und die aktuelle Motivation der Testperson ab. (vgl. Lack, 2009, S. 112)

In der Hochbegabtendiagnostik spielen Schulleistungen im Hinblick auf die Erkennung hoher Begabung, dem Finden geeigneter Förderprogramme bzw. dem Erkennen von Underachievement eine wichtige Rolle. (vgl. Preckel & Vock, 2013, S. 116)

Schulnoten sind eine sehr einfach zugängliche Datenquelle zur Schulleistung. Sie werden in der Schule in großer Zahl und regelmäßig vergeben. Dabei dienen sie nicht nur der Rückmeldung über die erbrachten Leistungen, sondern oft auch zur Selektion und Bewertung der Disziplin. Je länger der Bezugszeitraum einer Schulnote ist, desto aussagekräftiger ist diese in Bezug auf die Information. Z.B. enthält eine Zeugnisnote mehr Information als eine Note auf eine Schularbeit oder ein Notenschnitt über z.B. alle MINT-Fächer ist ein verlässlicheres Maß als nur die Physik- oder Chemienote. Es ist aber zu berücksichtigen, dass der Validität der Schulnoten im Hinblick auf die schulischen Leistungen und Kompetenzen nicht immer sehr hohes Maß zugemessen werden darf. Grund dafür ist die Abhängigkeit der Note von einer Bezugsnorm:

- Soziale Bezugsnorm
  Vergleich der Leistung einzelner Lernender zueinander (in der Klasse)
- Individuelle Bezugsnorm
  Vergleich der Leistungen eines Lernenden mit früher erbrachten Leistungen
- Sachliche oder kriteriale Bezugsnorm
  Vergleich der Leistungen der Lernenden mit zuvor festgelegten Lernzielen oder Kriterien

(vgl. Preckel & Vock, 2013, S. 118)

Im Falle der sozialen Bezugsnorm ist die Note für eine objektive Leistungseinschätzung nicht gut geeignet, da die Leistungskriterien an den Vergleichswert (z.B. die Klasse) angepasst werden, wodurch der Vergleich schulintern bereits erschwert wird.
Noten, die sich nach der individuellen Bezugsnorm orientieren, sind ebenfalls nicht zu einer objektiven Leistungsfeststellung geeignet. Sie sind aussagekräftiger im Hinblick auf den individuellen Entwicklungsverlauf. (vgl. Preckel & Vock, 2013, S. 117ff)
Genauso wie die sachliche oder kriteriale Bezugsnorm eignet sich auch ein standardisierter Schulleistungstest sehr gut zur objektiven Leistungsfeststellung. Ein standardisierter Test bedeutet, ihn auf eine Norm zu beziehen und zu vereinheitlichen. Im besten Fall entspricht so ein Test den oben genannten Gütekriterien der Intelligenzdiagnostik. Qualitative Hochwertigkeit erreicht ein standardisierter Test, wenn er zuvor empirisch überprüft und die Inhalte curricular valide sind, sprich Lernziele aus dem Lehrplan (und dem Unterricht) abdeckt. Schulleistungstests sind selten fächerübergreifend und decken meist nur Leistungen in einem Fach ab. Da standardisierte Tests im Allgemeinen auf Defizite hinweisen sollten, eignen sie sich zur Hochbegabtendiagnostik wegen dem Deckeneffekt nicht, können aber eine Tendenz sehr gut abbilden. Ein Lösungsansatz, um diesem Problem in der Hochbegabtendiagnostik auszuweichen, wäre, den Kindern Tests vorzulegen, die für deutlich ältere Kinder oder Jugendliche entwickelt wurden. (vgl. Preckel & Vock, 2013, S. 120ff)

Kreativitätsdiagnostik

Kreativitätstests erfassen vorrangig den Aspekt des divergenten Denkens, obwohl Kreativität wesentlich mehr Komponenten umfasst. Für die Testperson werden dabei Situationen geschaffen, bei denen ungewöhnliche Lösungen und Antworten gefordert werden. Die Auswertung solcher Tests stellt sich durch die schwere Vergleichbarkeit und Bewertung sehr komplex dar, da die Ergebnisse zum Teil einzigartig sind bzw. eine Abgrenzung zu irrationalen oder sinnlosen Lösungen nicht leichtfällt. Die den Intelligenztests zugrundeliegenden Gütekriterien finden hier kaum Anwendung, was die Aussagekraft der Kreativitätstests relativiert. (vgl. Lack, 2009, S. 111f)

Nominierung und Checklisten

Die Identifikation Hochbegabter erfolgt am einfachsten mit ihrer Benennung durch verschiedene Personen (Lehrkräfte, Eltern, Gleichaltrige,…). Die dahinterstehenden

Beobachtungen sind grundlegende Methoden in der pädagogischen Diagnostik und gehören den subjektiven Diagnosemethoden an. (vgl. Preckel & Vock, 2013, S. 131)
Nominierungen durch Lehrkräfte werden durch verschiedene Faktoren (schulische Leistungen, Alter, Geschlecht, soziale Herkunft, …) beeinflusst. Es ist zu berücksichtigen, dass Lehrer*innen im Allgemeinen der Rolle des Beurteilens von Leistungen nachkommen und so die notwendigen Kompetenzen auf Begabung übertragen. Diese Gleichsetzung von Begabung und Leistung führt beispielsweise dazu, dass hochbegabte Underachiever übersehen werden. (vgl. Lack, 2009, S. 112f)
Um die Effektivität und Effizienz der Nominierung durch Lehrpersonen zur erhöhen, wurden Checklisten, die typische Merkmale hochbegabter Kinder und Jugendlicher beinhalten, erstellt. Für das Erkennen Hochbegabter sind diese Listen nur als Hilfestellung ohne Anspruch auf Vollständigkeit zu sehen, da die Gruppe der Hochbegabten eine sehr heterogene Gruppe darstellt. Viele Merkmale sind so unklar formuliert, dass sie auf viele (nicht hochbegabte) Kinder zutreffen können. (vgl. Preckel & Vock, 2013, S. 131ff)
Elternbeobachtungen spielen besonders in den frühen Lebensjahren eines Kindes eine wichtige Rolle. Bereits in diesem Lebensabschnitt können sich Begabungen entfalten, die durch den Blickwinkel der Eltern erfasst werden. Vor allem bei den Elternbeobachtungen fehlt die Vergleichbarkeit mit anderen Kindern. Weiters fällt eine objektive Einschätzung schwerer, weil nicht selten Emotionen mitspielen und es sich um eine nahestehende Person handelt. (vgl. Lack, 2009, S. 112f)
Auch die Selbstnominierung von Schüler*innen, was eine gute Selbsteinschätzung voraussetzt, wird bei der Hochbegabtendiagnostik vor allem in höheren Altersstufen eingesetzt. Es ist hier anzumerken, dass sich Schüler*innen, die nicht über eine besondere Begabung verfügen bzw. Underachiever sind, eher zurückhaltend einschätzen. Erweiternd dazu kann die Einschätzung durch Peers Informationen preisgeben, die Erwachsenen kaum zugänglich sind, da sich Kinder im Gegensatz zu Außenstehenden untereinander anders beobachten. (vgl. Preckel & Vock, 2013, S. 134f)

2.3.2. Kombination der Verfahren zur Identifikation

Wie im Kapitel 2.3.1. beschrieben, birgt jedes einzelne Verfahren zur Diagnose Hochbegabter Vor-, aber auch Nachteile. Deswegen werden in der Praxis häufig verschiedene Diagnosemethoden in Kombination eingesetzt. Einerseits wird dadurch den mehrdimensionalen Begabungs- und Intelligenzmodellen verstärkt nachgekommen, andererseits sind die Informationen breiter gefächert, was eine fundiertere und wahrheitsgetreue Aussage der Diagnose stützt. (vgl. Lack, 2009, S. 114)

2.3.3. Underachievement

Hohe Begabung ist nicht immer mit herausragenden schulischen Leistungen gleichzusetzen. Durchschnittliche, aber auch unterdurchschnittliche Leistungen kommen bei hochbegabten Kindern und Jugendlichen vor. Nicht selten müssen in der Folge Klassenstufen wiederholt oder auch Ausbildungsstätten gewechselt werden. Sind Leistungen über einen längeren Zeitraum negativ zu beurteilen, obwohl die Schülerin oder der Schüler als hochbegabt gilt, spricht man von Underachiever. (vgl. Preckel & Vock, 2013, S. 82)

Underachiever sind Talente, deren Leistung aktuell beeinträchtigt ist, wodurch sich bei Nichtintervention ungünstige Prognosen für die Erreichbarkeit von Leistungsexzellenz ergeben.
(Ziegler, 2018, S. 18)

Genau wie Ziegler definieren auch Preckel & Vock Underachievement als längerfristig andauernde erwartungswidrige Diskrepanz zwischen der intellektuellen Fähigkeit und der tatsächlich dargelegten Leistung. Es ist jedoch schwer, vergleichbare Studien für Underachievement zu finden, da nicht genau definiert ist, wie groß die Diskrepanz sein muss, um von Underachievement zu sprechen. Weiters ist auch nicht klar, ob sich Underachievement auf alle Schulfächer bezieht oder nur auf einige wenige beschränkt. (vgl. Preckel & Vock, 2013, S. 82)
Gründe für Underachievement sind breit gefächert und nicht auf alle Hochbegabten generalisierbar. In den meisten Fällen spielen Faktoren individueller, familiärer oder schulischer Natur eine Rolle.

- individuelle Ursache:
  Defizite bei Lern- und Arbeitstechniken, Schwierigkeiten in der Selbstregulation (können sich schwer für langweilige Aufgaben motivieren)
- familiäre Faktoren:
  familiäre Konflikte, Leistungsdruck & Beziehungsprobleme zwischen Eltern und Kindern
- schulische Faktoren:
  starres Curriculum (ohne Differenzierungsmöglichkeiten), zu hohe oder zu niedrige Lernerwartung der Lehrperson

Meistens wird Underachievement erst bemerkt, wenn die Leistungsanforderungen steigen (z.B. am Beginn der Sekundarstufe I) und die Inhalte selbständig erarbeitet werden müssen. Eine dementsprechende Förderung, die Beseitigung familiärer Probleme oder auch die therapeutische Beratung können Underachievement verringern. (vgl. Preckel & Vock, 2013, S. 84ff)
Zur Diagnose von Underachievement ist es wichtig, eine hinreichend große Diskrepanz zwischen intellektuellem Potenzial und schulischer Leistung festzustellen. Dazu dient eine möglichst reliable und valide Erfassung des schulischen Leistungsniveaus sowie der intellektuellen Fähigkeiten. Es ist daher empfehlenswert, einen Intelligenztest und neben den Schulnoten auch noch standardisierte Schulleistungstests einzusetzen. (vgl. Preckel & Vock, 2013, S. 123ff)

3. Begabungsförderung

Im folgenden Kapitel wird das Thema Begabtenförderung von mehreren Seiten beleuchtet: Nach der Klärung der rechtlichen Grundlagen (Lehrplan, Schulunterrichtsgesetz) werden unterschiedliche Förderformen zur Unterstützung hochbegabter Kinder und Jugendlicher vorgestellt. Im Speziellen wird dabei auf die Förderung in Oberösterreich und an der Johannes Kepler Universität eingegangen.

Begabungsförderung hat das Ziel, die Entwicklung der Potenziale von Kindern und Jugendlichen bestmöglich zu unterstützen. (Weilguny, Resch, Samhaber, & Hartel, 2011, S. 13)

Es gibt eine Vielzahl an Möglichkeiten der Begabtenförderung, schulisch oder außerschulisch. Kinder, sowohl lernschwache als auch hochbegabte, sollen je nach Veranlagungen bestmöglich gefördert werden. Im Unterricht soll auf die besonderen Lernpotenziale (hochbegabter) Kinder und Jugendlichen eingegangen werden, damit eine bestmögliche Entfaltung geboten werden kann. Dazu sind verschiedene Konzepte der Förderung entwickelt worden. Grundprinzipien dieser sind die Achtung der Grundbedürfnisse und die Förderung der Person. Jedem Lernenden soll das Recht eingeräumt werden, je nach persönlichem Lernstil und individuellen Interessen lernen zu dürfen und sich keiner homogenen Gruppe anpassen zu müssen. Es ist somit zur Förderung wichtig, die Heterogenität, also die Differenzierung, Vielfalt und Verschiedenheit der Hochbegabten anzuerkennen. (vgl. ÖZBF, 2020, S. 7ff)

3.1. Rechtliche Grundlagen zur Begabungsförderung

Alle Schüler*innen haben Anspruch auf Begabungsförderung, wodurch diese zum Grundauftrag der Gesellschaft, Schule bzw. des Unterrichts wird. Eine zentrale Rolle spielt die bestmögliche Unterstützung von Kindern bei der Entwicklung ihrer individuellen Potenziale. Dabei sind alle Lernenden mit ihren unterschiedlichsten Voraussetzungen (z. B. kultureller Hintergrund) miteingeschlossen, um sie auf ihrem Weg der vollen Potenzialausschöpfung zu begleiten. Es stehen dazu eine Vielzahl an Förderformen für begabte Schüler*innen zur Verfügung. Gemeinsam mit den Erziehungsberechtigten entscheidet die Lehrperson, welche Förderform für das Kind am besten geeignet ist. Außerdem müssen der Lehrplan und die rechtlichen

Grundlagen berücksichtigt werden. (vgl. Weilguny, Resch, Samhaber, & Hartel, 2011, S. 30ff)

3.1.1. Bezug zum Lehrplan

Der Lehrplan für allgemeinbildende höhere Schulen bildet die Basis für die Bildungs- und Lehrziele der Sekundarstufe. Darin enthalten sind neben diesen auch der Lehrstoff der einzelnen Unterrichtsgegenstände. Im pädagogischen Beruf bildet der Lehrplan die Grundlage für die eigenverantwortliche Unterrichtsplanung.

Bereits im allgemeinen Teil der Lehrpläne wird der Bildungsauftrag verdeutlicht, wonach je nach individuellen Voraussetzungen jedes einzelne Kind bestmöglich in ihren Begabungen und Potenzialen, unabhängig von vorgefassten Bildern und familiären Rahmenbedingungen, gefördert werden soll. Dies umfasst nicht nur die Wissensaneignung, sondern auch die Vermittlung von Sozialkompetenzen. Es stehen neben dem Unterricht auch der Raum für soziale Erfahrungen und Lern- bzw. Entfaltungsmöglichkeiten im Mittelpunkt.

Um das Lernen für die Schüler*innen bestmöglich als Lehrperson zu gestalten, gibt es Leitlinien, welche für die Auswahl der Unterrichtsinhalte und die Vorbereitung der Lernsituationen nützlich sind. Diese werden als didaktische Grundsätze bezeichnet.

Darin enthalten ist die Förderung durch Differenzierung und Individualisierung, welche bei der kontinuierlichen Förderung der Leistungsfähigkeit und den Begabungen der Schüler*innen sehr wichtig ist. Dazu zählen neben der Erstellung eines differenzierten Lernangebots auch die Berücksichtigung des unterschiedlichen Betreuungsbedarfs, das Entwickeln von Rückmeldeverfahren, die das tatsächliche Leistungspotenzial widerspiegeln, und die Herstellung eines förderlichen Lernklimas zur Motivation. (vgl. Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne – allgemeinbildende höhere Schulen, 2021)

Freigegenstände und unverbindliche Übungen werden explizit im Schulorganisationsgesetz (§ 6 Abs. 4) als Maßnahme zur Förderung von besonders begabten und interessierten Schüler*innen aufgeführt:

„[…] Darüber hinaus können in den Lehrplänen auch weitere Unterrichtsgegenstände als Freigegenstände (auch Freigegenstände für besonders begabte und interessierte Schüler mit entsprechenden Anforderungen) […] vorgesehen werden.“

(Gesamte Rechtsvorschrift für Schulorganisationen, 2022)

3.1.2. Berücksichtigung der Begabungsförderung im Schulunterrichtsgesetz

Das österreichische Schulunterrichtsgesetz gilt seit 1962 an allen Schulen, die dem Öffentlichkeitsrecht unterliegen. § 2 besagt unter anderem, dass österreichische Schulen die Aufgabe haben, *„an der Entwicklung der Anlagen der Jugend […] durch einen ihrer Entwicklungsstufe und ihrem Bildungsweg entsprechenden Unterricht mitzuwirken“*. (Gesamte Rechtsvorschrift für Schulorganisationen, 2022)

Seither wurden für den Bereich Schule zahlreiche Gesetze, Verordnungen und Erlässe verabschiedet, in denen Begabungs- und Exzellenzförderung durch die Lehrperson ermöglicht wird.

Es wurden beispielsweise gesetzliche Rahmenbedingungen zum Überspringen von Klassen in der Primar- bzw. Sekundarstufe eingeführt und die frühzeitige Einschulung wird im Schulunterrichtsgesetz im § 26 geregelt. Bis 2006 war das Überspringen nur innerhalb einer Schulart vorgesehen. Seither ist auch das Überspringen von Klassen zwischen den Schulstufen der Primar- bzw. Sekundarstufe, z. B. von der 3. Klasse der Primarstufe in die 1. Klasse der Sekundarstufe, möglich. Die Schulpflicht von 9 Jahren ändert sich nicht und muss weiterhin erfüllt werden. (vgl. Weilguny, Resch, Samhaber, & Hartel, 2011, S. 37f)

Auch das Fernbleiben vom Unterricht „aus wichtigen Gründen“ kann durch den Klassenvorstand bzw. durch die Schulleitung erlaubt werden. Diese Regelung des Schulunterrichtsgesetzes (§ 45) wurde durch einen Erlass des Bundesministeriums auch für die Begabtenförderung ausgelegt. So werden Lehrveranstaltungen der Universitäten, die nach der Reifeprüfung für das jeweilige Studium anrechenbar sind, für jüngere Lernende während der Unterrichtszeit zugänglich gemacht. (vgl. Weilguny, Resch, Samhaber, & Hartel, 2011, S. 38)

3.2. Förderformen

Zur Begabungsförderung stehen eine Vielzahl von schulischen und außerschulischen Ansätzen zur Verfügung. Wie auch im Lehrplan verankert, kann die Förderung integrativ oder separiert stattfinden. Integrativ bedeutet, dass Schüler*innen beispielsweise innerhalb der heterogen zusammengesetzten Klasse oder Lerngruppe bleiben und dort durch Differenzierung gefördert werden. Separation setzt auf den

Wechsel in eine andere Lerngruppe für Hochbegabte aus der Stammklasse. Weiters kann die Förderung einzeln oder in kleineren Schüler*innengruppen stattfinden. Eine weitere Unterscheidung der Fördermaßnahmen bietet das Enrichment bzw. die Akzeleration. (vgl. Preckel & Vock, 2013, S. 141)
Dabei versteht man unter Akzeleration das schnellere Durchlaufen eines Curriculums. Enrichment-Maßnahmen setzen auf das Anreichern des regulären Curriculums und vertiefte Lernen durch zusätzliche Veranstaltungen. (vgl. Ziegler, 2018, S. 86f)

Nachstehend bietet die Tabelle einen Überblick zu einigen Förderformen der Akzeleration und des Enrichments, sowie der Kombination dieser Förderformen.

Tabelle 1. Überblick über Hochbegabtenfördermaßnahmen (Preckel & Vock, 2013, S. 142)

Akzeleration (beschleunigtes Lernen)	**Enrichment (angereichertes Lernen)**	**Kombination aus Akzeleration und Enrichment (beschleunigtes und angereichertes Lernen)**
• Vorzeitige Einschulung • Flexible Eingangsstufe • Überspringen einer Klassenstufe • Teilunterricht in höheren Klassen	• Arbeitsgemeinschaften • Pull-out-Programme • Wahl zusätzlicher Kurse • Schüler*innenwettbewerbe • Kurse in Universitäten • Schüleraustauschprogramme • Ferienprogramme	• Spezialkindergärten • Spezialklassen • Spezialschulen • Frühstudium an einer Hochschule

3.2.1. Förderformen mit Schwerpunkt Akzeleration

Definition Akzeleration

Wie zuvor bereits erwähnt, wird Akzeleration mit „Beschleunigung“ ins Deutsche übersetzt. Im pädagogischen Sinn umfassen diese Förderformen das vorzeitige Einschulen, das Überspringen einer Schulstufe oder das Besuchen einer Hochschule auf individueller Ebene. Auf Klassenebenen wäre ein Beispiel die Schnellzugklasse. (vgl. ÖZBF, 2020, S. 9)

Akzelerationsmaßnahmen bedeuten für Schüler*innen, welche diese nach ausführlicher Absprache mit den Erziehungsberechtigten und den Lehrpersonen in Anspruch nehmen, dass sie die Bildungslaufbahn beschleunigt durchlaufen. Bereits im Vorfeld dieses Schrittes muss gut überlegt werden, ob dieser für das betroffene Kind die beste Lösung ist, oder ob andere Fördermaßnahmen besser geeignet sind. Die Förderform der Akzeleration muss immer individuell auf das Kind abgestimmt werden und das Kind sollte in die Entscheidung miteinbezogen werden. (vgl. ÖZBF, 2020, S. 33)

Obwohl wissenschaftliche Studien belegen, dass die Formen der Akzeleration sehr effektive Fördermaßnahmen sind, verursachen sie vor allem bei Nicht-Fachleuten Skepsis. Diese ist unbegründet, da Hochbegabte, die beispielsweise eine Klasse überspringen, nur ca. 6 Wochen zum Nachholen des versäumten Stoffes benötigen. Die pädagogischen Nachteile, wenn nicht übersprungen wird, sind im Verhältnis meist weitaus größer. (vgl. Ziegler, 2018, S. 86)

Nachfolgend wird auf zwei gängige Formen der Förderung durch Akzeleration genauer eingegangen:

Vorzeitiges Einschulen

1774 ist die Schulpflicht von Maria Theresia eingeführt worden. Mit der Vollendung des 6. Lebensjahres beginnt im darauffolgenden September die Schulpflicht für das betreffende Kind. Neben dieser regulären Form der Einschulung besteht auch die Möglichkeit einer vorzeitigen Einschulung, die bei eindeutiger allgemeiner kognitiver Unterforderung des Kindes ins Auge gefasst werden kann.

Laut Schulpflichtgesetz (§ 7) dürfen Kinder mit großen Entwicklungsvorsprung eingeschult werden, wenn sie bis zum 1. März des Folgejahres das 6. Lebensjahr vollenden.

> *§ 7. (1) Kinder, die noch nicht schulpflichtig sind, sind auf Ansuchen ihrer Eltern oder sonstigen Erziehungsberechtigten zum Anfang des Schuljahres in die erste Schulstufe aufzunehmen, wenn sie bis zum 1. März des folgenden Kalenderjahres das sechste Lebensjahr*

vollenden, schulreif sind und über die für den Schulbesuch erforderliche soziale Kompetenz verfügen.

§ 7. (4) Der Schulleiter hat zur Feststellung, ob das Kind die Schulreife gemäß § 6 Abs. 2b aufweist und ob es über die für den Schulbesuch erforderliche soziale Kompetenz verfügt, die persönliche Vorstellung des Kindes zu verlangen und ein schulärztliches Gutachten einzuholen. […]
(Gesamte Rechtsvorschrift für Schulpflichtgesetz 1985, 2022)

Bei Bedarf kann auch ein psychologisches Gutachten zur besseren Einschätzung hinzugezogen werden. In jedem Fall ist es wichtig, die Erziehungsberechtigten und das betroffene Kind über die Vor- und Nachteile der vorzeitigen Einschulung und über mögliche Alternativangebote ausführlich zu informieren. Es ist empfehlenswert, in der Zeit des Übergangs in die Schule sowohl die Eltern als auch das Kind zu begleiten und zu unterstützen. Ist die Schulfähigkeit noch nicht vorhanden, so ist es für das Kind und seine Entwicklung besser, durch den Kindergarten bzw. Enrichment-Programme eine Förderung zu erfahren und regulär eingeschult zu werden. (vgl. ÖZBF, 2020, S. 33)

Überspringen

Schüler*innen ist es in Österreich möglich, eine oder mehrere Klassen zu überspringen. Die genauen Regelungen finden sich im Schulunterrichtsgesetz (§ 26).

§ 26. (1) Ein Schüler, der auf Grund seiner außergewöhnlichen Leistungen und Begabungen die geistige Reife besitzt, am Unterricht der übernächsten Schulstufe teilzunehmen, ist auf sein Ansuchen in die übernächste Stufe der betreffenden Schulart aufzunehmen. Die Aufnahme in die übernächste Schulstufe ist nur zulässig, wenn eine Überforderung in körperlicher und geistiger Hinsicht nicht zu befürchten ist. Im Zweifel ist der Schüler einer Einstufungsprüfung und allenfalls auch einer schulpsychologischen und (oder) schulärztlichen Untersuchung zu unterziehen. Schüler der Grundschule dürfen nur dann in die übernächste Schulstufe aufgenommen werden, wenn dadurch die Gesamtdauer des Grundschulbesuches nicht weniger als drei Schuljahre beträgt.
(Gesamte Rechtsvorschrift für Schulunterrichtsgesetz, 2022)

Neben dem Überspringen in einer Schulart ist auch das Überspringen an sogenannten Nahtstellen (z.B. von der Volksschule in die Mittelschule bzw. allgemeinbildende Schule) möglich. Diese Förderform kann für das Kind eine wirkungsvolle Maßnahme bilden, jedoch sollte die individuelle Förderung weiterhin aufrecht gehalten werden.
Folgende Voraussetzungen sind wichtig für ein erfolgreiches Überspringen:

- Überdurchschnittliche kognitive und auf schulische Anforderungen bezogene Leistungsfähigkeit
- Hohe Lernmotivation und großes Durchhaltevermögen
- Vorurteilsfreie und offene Förderung der zukünftigen Lehrperson
- Vorbehaltlose Zustimmung des Kindes zum Überspringen
- Sozial-emotionale Reife
  Bei der Einschätzung sollte darauf geachtet werden, dass andauernde Frustration, beispielsweise durch Unterforderung, das Entstehen von unangemessenem sozialem Verhalten begünstigt. Es ist darauf zu achten, ob es sich tatsächlich um sozial-emotionale Unreife handelt, oder ob dies von Beobachtern als Resultat einer ständigen Unterforderung nur so wahrgenommen wird. Bei der Beurteilung der sozial-emotionalen Kompetenz sollten sowohl Lehrpersonen als auch Erziehungsberechtigte und im Bedarfsfall ein psychologisches Gutachten zu Rate gezogen werden.
- Frustrationstoleranz
  Vorübergehend muss der/die Lernende auch schwächere bzw. nicht perfekte Leistungen ertragen können.

Ist die Begabung nur in einem Bereich (musisch, sportlich, sprachlich,…) sehr ausgeprägt, sind andere Formen der Begabungsförderung ins Auge zu fassen (z.B. Teilspringen in höhere Klassen, extra curriculare Förderung,…) (vgl. ÖZBF, 2020, S. 33f)

3.2.1. Förderformen mit Schwerpunkt Enrichment

Definition Enrichment

Die Förderformen des Enrichment bieten den zu fördernden Kindern eine Anreicherung des Lehrstoffs, welche über den Lehrplan hinausgeht. Dies ist einerseits über die Verbreiterung des Lehrangebots möglich, indem zusätzliche Themenbereiche behandelt werden. Andererseits können Themenbereiche vertieft werden, sodass das Interesse und die Motivation der begabten Schüler*innen gefördert werden. (vgl. Ziegler, 2018, S. 86)

Enrichment kann innerhalb oder außerhalb des Unterrichts bzw. der Schule stattfinden. Weiteres wird zwischen vertikalem Enrichment, d.h. die Vertiefung frei gewählter Inhalte, und horizontalem Enrichment, welches die Möglichkeit der Erweiterung von außerschulischen Themenfeldern und Domänen bietet, unterschieden. (vgl. ÖZBF, 2020, S. 9)

Laut empirischen Studien haben Enrichmentmaßnahmen eine geringere Förderwirkung als die Förderung durch Akzeleration. Dies bedeutet nicht, dass diese Fördermaßnahmen keine positive Wirkung zeigen. Im Gegenteil, eine (geringe) Förderwirkung ist nachzuweisen und ein gezieltes Einsetzen von Enrichmentmaßnahmen in Kombination mit weiteren Fördermethoden zeigt durchaus positive Effekte. (vgl. Ziegler, 2018, S. 86f)

Drehtürmodell

Darunter versteht man pädagogische Maßnahmen, die den Lernenden eine Tür zu neuen Bildungsräumen öffnet und ihnen so eine individuelle Auseinandersetzung mit bestimmten Themengebieten parallel zum Unterricht ermöglicht. Im kleineren Maßstab wäre eine Möglichkeit, einen abgegrenzten Bereich im Klassenzimmer zu definieren, in dem die Schüler*innen bestimmte Themen vertiefen können. Eine andere Möglichkeit wäre, vorübergehend eine andere Bildungsinstitution aufzusuchen und den regulären Unterricht zwischenzeitlich zu verlassen. Um die Struktur und den Ablauf dieser Förderform zu vereinbaren, können beispielsweise Lernverträge zwischen den Lernenden und den Lehrenden geschlossen werden. Darin wird genau festgehalten, wann der/die Schüler*in den Klassenunterricht verlässt, welche Lernziele erreicht werden sollen und wie die erarbeiteten Produkte in den Unterricht eingebracht werden sollen. Je nach Arrangement und Selbständigkeit kann dies durch ein genaues Zeitfenster oder offener gestaltet werden. (vgl. ÖZBF, 2020, S. 11f)

Differenzierte Lernziele und Lernprodukte: Förderung im Klassenverband

Um den Schüler*innen eine individuelle Förderung bieten zu können, ist es vor allem in einer heterogenen Gruppe wichtig, differenzierte Aufgaben zu stellen. Eine Abwägung zwischen Lernangebot und Lernvoraussetzung und einer Vorbeugung von Unter- als auch Überforderung bilden den Grundstein der Begabungsförderung im

Klassenzimmer. Die Differenzierung kann neben der Quantität und Qualität auch die Lerninhalte und Lernmedien umfassen. Weiters ist der Grad des Vorwissens, die Sozialform, das Hilfsangebot (keine Hilfestellung, Hilfe durch Mitschüler*innen oder Lehrpersonen), der Grad der Eigenständigkeit und der Anteil an Reflexion des Lernprozesses vorab zu klären. Alle Faktoren zielen darauf ab, den Schüler*innen eine Verantwortung am Lernprozess zukommen zu lassen. (vgl. ÖZBF, 2020, S. 16)

Ferienakademien

Wie bereits aus dem Namen hervorgeht, findet dieses Enrichment-Angebot in den Ferien statt. Schüler*innen wird dabei ermöglicht, Fachwissen auf einem bestimmten Gebiet zu vertiefen und andere Kinder und Jugendliche kennen zu lernen, die ähnliche Fähigkeiten und Interessen besitzen. Solche Veranstaltungen erstrecken sich meist über ein bis zwei Wochen, in denen alle Teilnehmer*innen in gemeinsamen Unterkünften zusammenleben. Die Vermittlung der Inhalte passiert auf einem höheren Niveau und zumeist auch in einem schnelleren Tempo, als es ein Regelunterricht zulässt. (vgl. Preckel & Vock, 2013, S. 166f)

Pull-Out-Programme und extracurriculare Kurse

Für diese Programme verlassen Kinder zeitweise den Regelunterricht und nehmen an einem extracurricularen Kurs teil. Allein oder in Gruppen erweitern sie ihr Wissen und probieren unterschiedliche Methoden aus. Außerhalb dieser Programme nehmen sie am Regelunterricht teil. (vgl. Ziegler, 2018, S. 87)

Im Gegensatz zu Pull-Out-Programmen finden extracurriculare Kurse meist am Nachmittag (in der schulfreien Zeit) statt. Die Nachfrage an solchen Kursen ist sehr hoch, obwohl sie in der Freizeit stattfinden. Besonders profitabel ist dieses Enrichment-Angebot für jene Kinder, die in der Schule durch die ständige Unterforderung frustriert sind und in der Arbeitsgemeinschaft des Kurses eine Herausforderung finden. Durch die Teilnahme an solchen Angeboten wird die Persönlichkeits- und Fähigkeitsentwicklung gefördert, das Interesse und die Lernfreude werden aufrechtgehalten. (vgl. Preckel & Vock, 2013, S. 167f)

Schülerwettbewerbe und -olympiaden

Schüler*innenwettbewerbe bieten die Möglichkeit, sich Herausforderungen zu stellen und so Kreativität und Leistungsbereitschaft zu zeigen. Ziel ist es, das Engagement und die persönlichen Interessen- und Begabungsgebiete zu verstärken und Problemlösefähigkeiten zu fördern. Durch die Teilnahme am Wettbewerb soll die

Entwicklung eines starken Selbstbewusstseins und die soziale Kompetenz weiter ausgeprägt werden. Solche Wettbewerbe stellen auch eine Möglichkeit der Begabungsentdeckung für Schüler*innen dar, die im Regelunterricht bislang nicht aufgefallen sind. (vgl. Preckel & Vock, 2013, S. 168f)
Zusätzlich bieten Wettbewerbe und Olympiaden, besonders für begabte und interessierte Schüler*innen, einen Anreiz, da sie neben der inhaltlichen Herausforderung auch die Möglichkeit bieten, sich auf höherem Niveau mit Gleichgesinnten zu vergleichen und an einem Problem zu arbeiten. Die Lernumgebung in der Vorbereitung für die Olympiaden und Wettbewerbe sind an die Fähigkeiten und Anforderungen der Teilnehmer*innen entsprechend angepasst. (vgl. ÖZBF, 2020, S. 31)

In der nachfolgenden Tabelle sind die wichtigsten Olympiaden und Schüler*innenwettbewerbe in Österreich je nach Fachbereich aufgelistet:

Tabelle 2: Olympiaden und Wettbewerbe in Österreich (ÖZBF, 2020)

Wettbewerbe und Olympiaden			
Naturwissenschaften	Geisteswissenschaften	Wirtschaft & Technik	Musik, Kunst & Sport
Physik-Olympiade	Klassische & moderne Fremdsprachen – *auch DAF (Deutsch als Fremdsprache)*	Jugend Innovativ	Prima la Musica
Chemie-Olympiade	Redewettbewerbe, *z.B. mehrsprachig: Sag's multi!*	SciChallenge	Gradus ad Parnassum
Mathematik-Olympiade	Aufsatz- und Literaturwettbewerbe	u19 Create Your World	Film- und Fotowettbewerbe *z.B. Media Literacy Award*
Informatik-Olympiade	Philosophie-Olympiade		Schulsportwettbewerbe
			Schulschach

Frühstudium
Durch das Programm „Schüler*innen an die Hochschulen“ ist es Begabten möglich, als außerordentliche Hörer*innen an Veranstaltungen der Hochschulen teilzunehmen. Es besteht die Möglichkeit, Leistungsnachweise, die während der Schulzeit erbracht wurden, nach der Reifeprüfung für das ordentliche Studium anzurechnen, wodurch sich die Studienzeit entsprechend verkürzt. Die Teilnehmer*innen des Programms erhalten eine frühzeitige Orientierungsphase, in der sie ihr Wissen in ausgewählten

Fachgebieten vertiefen können. Zusätzlich lernen die Schüler*innen das Hochschulleben bereits im Vorfeld kennen.
Das Frühstudium entspricht einer Mischform von Enrichment (Anreicherung während der Schulzeit) und Akzeleration (frühzeitiger Einstieg ins Studium), wobei der Enrichmentcharakter ausgeprägter ist. (vgl. Preckel & Vock, 2013, S. 169f)

Talenteportfolio

Portfolios eignen sich hervorragend zur Arbeit mit begabten Lernenden. Sie bilden eine Sammlung verschiedener Leistungen, mit der der Entwicklungsstand und der Lernfortschritt dokumentiert wird. Neben dem Sichtbarmachen von Stärken und Begabungen kann ein Portfolio auch zur Leistungsfeststellung und -beurteilung herangezogen werden. Ziel des Portfolios ist es:

- Informationen über Stärken des Lernenden in Kooperation mit der Lehrperson zu sammeln.
- je nach Interesse, Lernstil und Fähigkeiten die Inhalte zu systematisieren, neu zu ordnen bzw. auszusortieren
- für den/die Portfolioersteller*in geeignete Fördermaßnahmen durch die Lehrperson bzw. den/der Erziehungsberechtigten zu suchen.

(vgl. ÖZBF, 2020, S. 14)

Mentor*innen

Mentor*innen sind Expert*innen auf einem speziellen Gebiet und unterstützen hochbegabte Kinder in einem bestimmten Fachgebiet. Die Schüler*innen werden auf einem Gebiet in spezifische Arbeits- und Denkweisen eingeführt und können mit Hilfe der Mentoren neue Methoden kennenlernen. Neben dem fachlichen Wissen wird auch die Sozialkompetenz und die Anregung zur Selbstreflexion der Mentee durch die Experten gefördert. Der Vorteil dieser Förderform liegt vor allem darin, dass sich der/die Mentor*in an die individuellen Begabungen und Interessen des Mentee anpassen kann, wenn sich die Dauer des Mentoring über einen längeren Zeitraum erstreckt. Auch Lehrer*innen können als Mentoren agieren, wobei auf die zwei unterschiedlichen Beziehungen (Lehrer*in – Schüler*in und Mentor*in – Mentee) zu achten ist, da sich diese zwangsläufig gegenseitig beeinflussen. Die Leistungsbereitschaft und die Motivation des/der Schüler*in wird durch das individuelle Feedback des/der Mentor*in gefördert. (vgl. ÖZBF, 2020, S. 36)

Peer Teaching

Diese Förderform wird oft auch als Peer Tutoring oder Cross-Age Tutoring bezeichnet. Unter Peer Teaching versteht man, die Übernahme der Lehrendenrolle durch die Lernenden. Der Vorteil dieser Unterrichtsmethode liegt darin, dass die Schüler*innen weniger Hemmungen haben, sich am Unterricht aktiv zu beteiligen und nachzufragen, wenn Inhalte nicht klar sind. Außerdem werden Themen meist intensiver und motivierter bearbeitet, zusätzlich wird das soziale Lernen dabei gefördert. Der/die als „Peer" fungierende Lernende muss nicht nur den Inhalt verstanden haben, sondern sich auch Gedanken zur Aufbereitung, Präsentation und Erarbeitung der Inhalte machen. Außerdem ist auch eine Evaluation, ob die Klasse den Stoff auch verstanden hat, notwendig. (vgl. ÖZBF, 2020, S. 15)

3.3. Förderung in Oberösterreich mit Fokus auf die JKU

In Oberösterreich finden sich bereits viele Angebote für begabte und interessierte Schüler*innen. Nachfolgend wird eine Auswahl an Programmen, die von unterschiedlichen Institutionen angeboten werden, vorgestellt.

Im **COOL Lab**[1], der innovativen Lehr-Lern-Werkstatt für digitale Bildung & Computational Thinking, werden Workshops für verschiedene Altersgruppen angeboten. COOL steht dabei für COoperative Open Learning, COmputer(Science)-supported Open Learning (Technologien und Informatikkonzepte zur Unterstützung von Lehren und Lernen in allen Fächern), Cross-Curricular Open and Online Learning sowie "cool" im Sinne von motivierend, kreativ, spannend, spielerisch, etc. Das COOL Lab versteht sich als eine Lehr-Lern-, Kreativ- und Forschungswerkstatt für alle Fächer mit verschiedenen, zum Teil wechselnden Themenschwerpunkten und Labs, in denen Besucher*innen je nach Interesse und Kompetenzen in die Rolle von Lernenden, Lehrenden, Forscher*innen und Entwickler*innen schlüpfen und neueste Technologien ausprobieren und/oder nutzen können.

[1] https://www.cool-lab.net

Die **Internationale Akademie Traunkirchen**[2] im Salzkammergut fördert Kinder und Jugendliche im Alter von 6 – 18 Jahren im Bereich Kunst, Naturwissenschaft und Technik. Neben Tagesseminaren können auch Workshops mit Referent*innen sowohl als Einzelperson als auch in Gruppen oder Schulklassen besucht werden.

Talente Oberösterreich[3] ist die offizielle Hochbegabten-Förderstelle des Landes Oberösterreich. Es wird von der Nominierung des Kindes über die Testung auf Hochbegabung bis hin zur Förderung und Begleitung der Hochbegabten ein breites Angebot für Pädagog*innen, Eltern und Erziehungsberechtigten zur Verfügung gestellt. Das Programm zur Förderung der Hochbegabten erstreckt sich von der Elementarstufe über die Primarstufe hin zur Sekundarstufe. In verschiedenen Fachbereichen werden Kurse und Workshops für talentierte Schüler*innen an unterschiedlichen Standorten in ganz Oberösterreich angeboten. Auch spezielle Ferienprogramme für Hochbegabte stehen jedes Jahr für Mitglieder des Vereins auf dem Programm.

Die **Science Holidays**[4] an der JKU Linz bieten in einer Ferienwoche Kindern im Alter von 6 bis 14 Jahren Einblicke in die verschiedenen Forschungsgebiete. In Workshops, Seminaren und Exkursionen wird auf spannende und altersgerechte Weise die Forschungswelt von Naturwissenschaften, Technik, Recht, Medizin, Wirtschaft, Soziales und Sport eingegangen. Insgesamt können jeden Sommer etwa 660 Kinder am Programm teilnehmen, wobei die Kinder durch Zufall aus allen Anmeldungen ausgewählt werden.
Auch die **Kinderuni**[5] bietet jedes Jahr in einer Ferienwoche Kurse für Mädchen und Buben in verschiedenen MINT-Bereichen und vielen anderen Themenfeldern an. Das Angebot richtet sich an Kinder und Jugendliche im Alter von 5 bis 15 Jahren und wird an sechs Standorten in Oberösterreich (Almtal, Ennstal, Hagenberg, Linz, Steyr und Wels) durchgeführt. Das Programm wird ständig erweitert und ist vor allem von Dozent*innen und Wissenschafter*innen abhängig, die sich zur Mitarbeit bereiterklären und ihr Forschungsgebiet für die Zielgruppen aufbereiten.

[2] https://www.akademietraunkirchen.com
[3] https://www.talente-ooe.at/
[4] https://www.jku.at/schule/scienceholidays/
[5] https://www.kinderuni-ooe.at/kinderuni-ooe/linz/

Das **Ars Electronika Center – Museum der Zukunft**[6] (AEC) bietet von der Elementarstufe bis hin zur Universität eine Vielzahl an Workshop-Angeboten im Bereich der Kunst und zukunftsweisenden Technologien. Dabei fungiert das Ars Electronica Center nicht nur als Wissensvermittler, sondern auch als Museum. Mit dem spielerisch kreativen Zugang wecken die Workshops die Begeisterung für neue Ideen und Engagement in der Wissenschaft. Mit dem Ferienprogramm bietet das AEC für Kinder von 6 – 14 Jahren ein zusätzliches Angebot mit altersgerechten Workshops zu zeitgemäßen Themen an.

Das Programm **Schüler*innen an die Hochschule**[7] richtet sich an besonders motivierte, wissensdurstige und interessierte Schüler*innen, welche dabei unterstützt werden, ein Studium bereits während der Schulzeit zu beginnen. Die besuchten und mit einer Prüfung absolvierten Lehrveranstaltungen werden nach der Matura für das jeweilige Studium angerechnet, wodurch sich die Studienzeit verkürzt. In Oberösterreich gibt es mehrere teilnehmende Hochschulen:

- JKU Linz (HeadStart@Informatics, Nawi-Tec Programm für Schüler*innen)
- Fachhochschule Oberösterreich
- Anton Bruckner Privatuniversität

Das **Nawi-Tec Programm**[8] für Schüler*innen an der JKU ist ab der 11. Schulstufe vorgesehen. Grundlage für dieses Programm bietet das Bachelorstudium Nawi-Tec, welches Chemie, Mathematik und Physik als Schwerpunkte umfasst. Die Teilnehmer*innen des Programms wählen vorab eines aus den drei oben genannten Fachgebieten aus. In enger Abstimmung mit dem Lehrplan der Zentralmatura wird ein Studium bereits vor der Matura ermöglicht. Die Überblicksvorlesungen können innerhalb von drei Semestern absolviert werden und werden im Bachelorstudium Nawi-Tec angerechnet.

[6] https://ars.electronica.art/center/de/schools/
[7] https://youngscience.at/de/angebote/schuelerinnen-an-die-hochschulen
[8] https://www.jku.at/schule/nawi-tec/

HeadStart@Informatics[9] bietet Jugendlichen ab der 11. Schulstufe einen Besuch ausgewählter Informatik-Lehrveranstaltungen an der JKU. Insgesamt können drei Vorlesungen aus dem 1. Semester des Bachelorstudiums Informatik absolviert werden. Die Vorlesungen werden auf drei Semester aufgeteilt und können nach der Matura im Bachelorstudium der Informatik angerechnet werden. Bei diesem Programm wird bereits vor der Matura durch das außerordentliche Studium ein Hineinschnuppern in das Universitätsleben und in die Informatik geboten.

[9] https://www.jku.at/schule/headstartinformatics/open

4. Der Mini Talente Club

Im MINT-Bereich besteht eine weiter steigende Nachfrage an qualifizierten und talentierten Personen. Um dieser Nachfrage gerecht zu werden, setzte sich das JKU COOL Lab zum Ziel, eine lückenlose Begabungsförderung vom Kindergartenalter bis zum Studierendenalter zu schaffen. Durch die Beschäftigung mit MINT bereits im frühen Kindesalter wird das Interesse der Kinder geweckt, Talente gefördert und im weiteren Verlauf kann diese Förderung die Berufswahl maßgeblich beeinflussen. Um diese MINT-Förderung möglichst früh zu starten, wurde der Mini Talente Club als Teil der längerfristigen Begabtenförderung im COOL Lab ins Leben gerufen. In Kooperation mit Talente Oberösterreich, der offiziellen Hochbegabten-Förderstelle Oberösterreichs, welche bereits ein breites Angebot an Förderprogrammen für Hochbegabte bietet, wurde der Mini Talente Club als neues, regelmäßig stattfindendes Angebot zu MINT-Themenschwerpunkten für 8 bis 10-jährige Hochbegabte konzipiert.

4.1. Konzept und Zielsetzung des Mini Talente Clubs an der JKU

Der Mini Talente Club wird als Pull-Out-Programm für hochbegabte Kinder im Volksschulalter angeboten.

Die Anmeldung der Teilnehmer*innen erfolgt durch die Homepage von Talente Oberösterreich. Durch die begrenzte Teilnehmerzahl von ca. 10-12 Kindern werden aus allen Anmeldungen per Zufall die interessierten Kinder zum Club eingeladen. Es wird jedoch darauf Rücksicht genommen, eine möglichst ausgeglichene Mädchen- und Jungenanzahl, welche stark von den Anmeldungen abhängig ist, zu erreichen.

Im Club steht das selbständige Experimentieren, Forschen und Entdecken im Vordergrund. An jedem Termin werden unterschiedliche Themen aus dem MINT-Bereich aufgegriffen und vertieft. Neben dem selbstständigen Arbeiten wird vor allem das Arbeiten in Gruppen, wie in einem Forschungsteam, gefördert. Wissenschaftliches Denken (kreative Annahmen treffen, Hypothesen bilden und diese überprüfen) steht dabei im Mittelpunkt.

Der Club findet jedes Schulsemester statt und besteht aus 8 Workshops zu folgenden Themen aus dem MINT-Bereich:

- der JKU Campus und dessen Forschungsmöglichkeiten
- Mathematik
- Informatik
- Physik
- Chemie

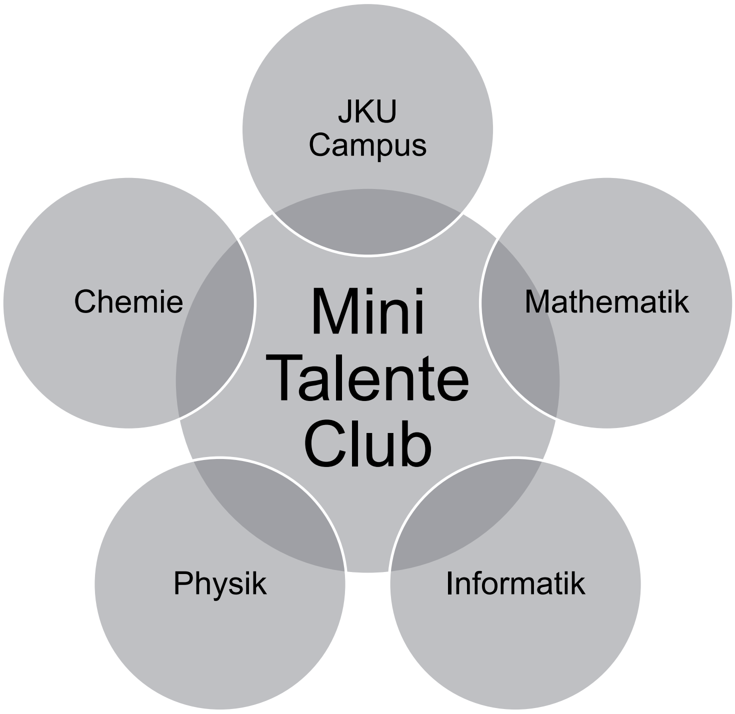


Abbildung 5: Überblick der Teilbereiche des Mini Talente Clubs

Je nach Gruppe und Teilnehmer*innen ändern sich die Inhalte laufend und werden an aktuelle Forschungs- und Projektthemen des JKU COOL Labs angepasst.

Die Workshops finden in einem Seminarraum oder Hörsaal am JKU Campus statt. Die Teilnehmer*innen lernen das Universitätsleben kennen und können so bereits früh eine neue Lernumgebung im tertiären Bildungsbereich erfahren. Im Zuge dessen steht eine kindgerechte Campus-Führung in Zusammenarbeit mit der Abteilung für Universitätskommunikation der JKU[10] in Form einer „Schnitzeljagd“ am Programm.

[10] Abteilung für Universitätskommunikation - Schulmarketing: https://www.jku.at/universitaetskommunikation/

Zwei Workshops befassen sich mit dem Kernthema dieser Arbeit. Nachdem hochbegabte Kinder auch komplexere Inhalte der Mathematik sehr schnell erfassen können, wird in diesen Workshops der Fokus auf weiterführende Themenschwerpunkte in der Mathematik gelegt. Außerdem sind die Aufgaben so gewählt, dass abstraktes Denken und das Finden neuartiger Lösungsstrategien, angelehnt an das COOL Informatics-Konzept des COOL Labs, gefördert werden. Im nachfolgenden Kapitel 5 wird auf diese zwei Workshops näher eingegangen. Dort befinden sich neben den fachlichen Inhalten auch die Aufbereitungen und Materialien für die jeweiligen Workshops.

Die Teilnehmer*innen des Clubs erforschen gemeinsam mit den Mitarbeiter*innen des COOL Labs die fünf genannten Teilbereichen in mehreren Workshop-Reihen. Für die Informatik stehen zwei Workshop-Termine zur Verfügung, in denen ein Einblick in die Informatik und damit in die Welt der Verschlüsselung, Codierung, Algorithmen und Modellierung geboten wird.

Fächerübergreifend zwischen Mathematik und Informatik gibt es auch einen Workshop, der sich mit dem Finden von Primzahlen befasst. Zum einen werden die Primzahlen aus dem mathematischen Blickwinkel von Vielfachen und Teilern im Zahlenraum 1-100 „ausgesiebt“ und zum anderen wird auch der Anwendungsbereich in der Informatik erklärt.

Gemeinsam mit der Abteilung für MINT Didaktik – Physik[11] wird aus diesem Forschungsgebiet ein Workshop-Termin erkundet. Dabei tauchen die Kinder in die Forschungswelt der Physik mit verschiedenen Experimenten ein. Die fachliche Komplexität liegt meist weit über dem momentanen Wissensstand der Kinder, was das Experimentieren und Herangehen an die Aufgabenstellungen der Teilnehmer*innen des Mini Clubs sehr interessant für die Forscher*innen der Abteilung macht. Die Inhalte sind so aufbereitet, dass sie nach dem Workshop zu Hause leicht nachgemacht werden können.

Das Fachgebiet der Chemie wird ebenfalls mit vielen Experimenten erkundet. Es steht auch hier, ähnlich zum Physik-Workshop, das Nachmachen der Experimente zu Hause im Fokus. Die Inhalte befassen sich mit für die Kindern alltäglichen Materialien („Haushaltschemikalien“) und deren chemische Wirkung.

[11] Abteilung für MINT Didaktik - Physik: https://www.jku.at/linz-school-of-education/abteilungen/abteilung-fuer-mint-didaktik/

4.2. Das COOL Informatics-Konzept des COOL Lab

Das didaktische Konzept „COOL Informatics“ wird als Grundlage aller Workshops im COOL Lab herangezogen, so auch beim Mini Talente Club. Dieses Konzept basiert auf der Initiative „COOL“, dem kooperativen offenen Lernen. Das COOL Informatics Konzept wird durch Computer-Science-Supported und Cross-Curricular Learning erweitert. Ursprünglich wurde es für das Fach Informatik in der Sekundarstufe entwickelt, ist aber ohne Probleme auf andere Fächer und Altersgruppen adaptierbar. COOL wird dabei nicht nur als **Wort der Jugendsprache** verwendet, sondern steht gleichzeitig für guten, abwechslungsreichen Unterricht. Auf Basis der 1996 gestarteten „COOL“-Initiative, welche **Kooperatives offenes Lernen** fördert, wurde das COOL Informatics-Konzept entwickelt. Die Idee hinter beiden didaktischen Konzepten ist es, die Heterogenität in Klassenzimmern zu berücksichtigen und darüber hinaus sogenannte „Soft-Skills“ zu fördern und zu vertiefen. COOL wird außerdem als **„COmputer-assisted Open Learning“** interpretiert. Dabei werden Technologien genutzt, um die Zusammenarbeit der Schüler*innen zu verbessern und zu erleichtern. Weiters verschränkt das COOL Informatics Konzept mehrere Fachbereiche (**Cross Curricular Learning**) und fördert das vernetzte Denken und Lernen.

Die Aufgabenstellungen und Unterrichtsgestaltung basieren auf den vier Grundprinzipien Entdeckung (discovery), Kooperation (cooperation), Eigenständigkeit (individuality) und Umsetzung (activity) (vgl. Sabitzer & Pasterk, 2013). In folgender Abbildung wird ein Überblick der vier Grundprinzipien und dazu passende Lehr- und Lernmethoden sowie zugrundeliegende neurodidaktische Prinzipien gezeigt.

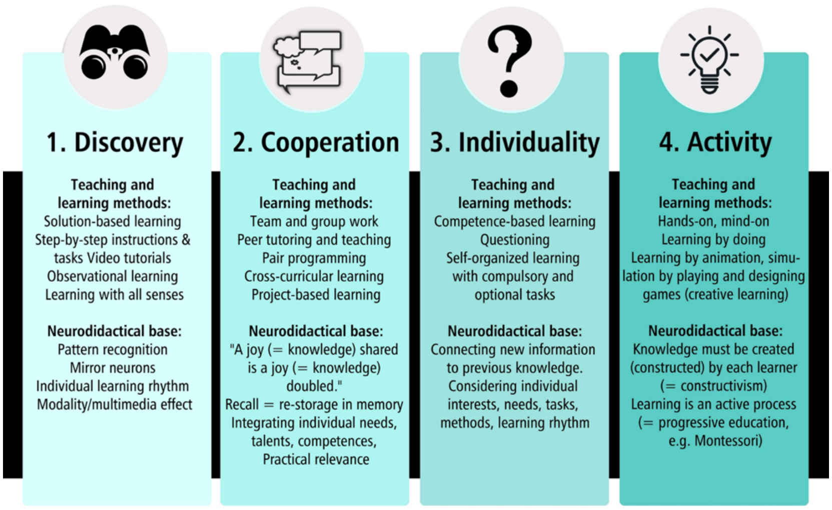


Abbildung 6: COOL Informatics Konzept (Sabitzer, 2014)

4.3. Methoden

Für die Workshops im Mini Talente Club bieten sich vor allem schülerorientierte und kooperative Arbeitsformen an. Es ist dabei wichtig, Präsentation und Reflexion unterschiedlicher Lösungswege ohne Wertungen vortragen zu lassen, was beispielsweise durch einen *Museumsrundgang*[12] erreicht werden kann. Erst im Anschluss sollten die Lösungen und Lösungswege verglichen und auf Plausibilität geprüft werden. Die Bandbreite der Lösungen sollte eher weit gehalten werden, um den Kindern einen uneingeschränkten Arbeitsprozess zu ermöglichen.

Die Präsentation der Lösungen hängt vor allem von der konkreten Aufgabenstellung ab. Wichtig beim Arbeiten mit Hochbegabten ist, die Schüler*innen zu ermutigen, Teilfragen zu stellen, begründete Annahmen zu treffen und ein Gefühl für Fragen zu entwickeln, die bei der Bearbeitung der Aufgabenstellungen helfen. (vgl. Büchter, Herget, Leuders, & Müller, 2010, S. 16ff)

Folgend wird eine Auswahl an Methoden vorgestellt, die bei einem Kurs im Mini Talente Club Verwendung finden können. Je nach Inhalt und Gruppe sollte dann individuell die passende Methode gewählt werden.

4.3.1. Gruppenarbeit

Eine Gruppe von Schülerinnen und Schülern arbeitet gemeinsam an einer gestellten Aufgabe, dokumentiert ihre Arbeit und präsentiert ihre Ergebnisse.

(Barzel, Büchter, & Leuders, 2015, S. 84)

Bei einer Gruppenarbeit stehen sowohl fachliche als auch soziale und kommunikative Kompetenzen im Mittelpunkt. Die Gruppenmitglieder sind aufgefordert, gemeinsam als „Team“ an ihrer Lösung zu arbeiten und diese auch nach außen hin zu repräsentieren. Diese Arbeitsform wird also nicht nur im Mathematikunterricht, sondern auch im Alltag gelebt.

[12] Alle Poster werden wie in einem Museum ausgehängt. In der „Museums-Zeit“ haben alle genügend Zeit, jedes Poster genau unter die Lupe zu nehmen. Dabei können die Poster durch die Ersteller des Posters betreut werden. Diese Schüler*innen sollten nach einiger Zeit wechseln, um selbst auch alle Poster betrachten zu können. Während des Rundgangs ist es sinnvoll, Inhalt, Struktur und Gestaltung aller Poster zu bewerten. Dies gewährleistet eine Auseinandersetzung mit jedem Poster durch die Schüler*innen.

Die Methode der Gruppenarbeit eignet sich vor allem, wenn die Aufgabenstellung mehrere Lösungswege, verschiedene Interpretationen und konkurrierende Ansätze zulässt. Außerdem sollte für die Bearbeitung und Ergebnissicherung genügend Zeit eingeplant werden. Oftmals sind in der Anfangsphase der Gruppenarbeit kaum Erfolge sichtbar, erst nach einiger Zeit ist der Prozess im Gang. Weiters sollte auch für die Darstellung und Diskussion der Ergebnisse genügend Zeit zur Verfügung stehen.

Die Zusammensetzung der Gruppen kann auf unterschiedliche Weise erfolgen. Es gibt zum einen die Bildung von **Zufallsgruppen** durch Durchzählen, Puzzleteile, Lose ziehen und dgl. Eine weitere Variante bildet die **Einteilung durch die Lehrperson**. Diese Variante eignet sich, wenn auf spezielle Eigenschaften und Kompetenzen der Schüler*innen eingegangen werden soll. Als dritte Gruppenbildungsvariante ist noch die **selbständige Zuordnung der Schüler*innen** zu erwähnen. Hier ist vor allem auf mögliche soziale Probleme (z.B. Außenseiter) zu achten. Generell muss darauf Rücksicht genommen werden, dass sämtliche Kinder des Clubs gleichwertig und in die Gruppe voll integriert sind.

In der Vorbereitung einer Gruppenarbeit sind folgende Punkte zu beachten:

- klare und verständliche Formulierung des Arbeitsauftrags
- Klärung der Arbeitsbedingungen (Zeit, eventuelle Hilfen, Dokumentation bzw. Sicherung der Arbeit)
- Auswertung bzw. Präsentation der Ergebnisse

(vgl. Büchter, Herget, Leuders, & Müller, 2010, S. 84ff)

4.3.2. Gruppenpuzzle

Mit einem Gruppenpuzzle können Schülerinnen und Schüler ein Thema, das in verschiedene Teilaspekte aufgeteilt werden kann, selbständig und kooperativ erarbeiten.
(Barzel, Büchter, & Leuders, 2015, S. 96)

Vor allem bei Fermi-Aufgaben mit mehreren ähnlich lautenden Fragen eignet sich das Gruppenpuzzle als besonders gute Methode. Bei dieser Arbeitsweise werden die Schüler*innen zuerst in möglichst gleich großen Gruppen geteilt und arbeiten im Anschluss an einem Thema, um zu Expert*innen zu werden. In der zweiten Runde werden die Gruppen neu gebildet, sodass jede Gruppe aus je einem Experten/einer

Expertin der ersten Runde besteht. Es wird so der Gesamtumfang der Aufgabenstellung miteinander bearbeitet. Es ist darauf zu achten, dass alle Aspekte gleich relevant und umfangreich sind und vor allem jeder Teilaspekt selbständig und unabhängig voneinander bearbeitet werden kann.
Der Einsatz von Gruppenpuzzles eignet sich zum Erarbeiten, Systematisieren, Üben, Vertiefen, Wiederholen oder zur Vorbereitung auf einen Test oder einer Schularbeit.
Auf die Ergebnissicherung (z.B. durch einen *Museumsrundgang*) ist bereits in der Vorbereitung zu achten. Die Gruppeneinteilung ist ebenfalls im Vorfeld aufzubereiten. (vgl. Büchter, Herget, Leuders, & Müller, 2010, S. 96ff)

4.3.3. Ich-Du-Wir

*Schülerinnen und Schüler werden nicht vorschnell mit den Ideen der Mitschüler*innen konfrontiert, sondern erhalten ausreichend Zeit und Ruhe, nach einem anregenden Impuls alleine nachzudenken und Ideen zu entwickeln.*
(Barzel, Büchter, & Leuders, 2015, S. 118)

Die Methode Ich-Du-Wir fördert eine intensive individuelle Auseinandersetzung mit der Aufgabenstellung. Im kleinen, geschützten Rahmen einer Partnerarbeit können die Ideen geäußert und besprochen werden, wodurch das Verbalisieren gefördert wird (später auch in der Gruppe). Es werden viele verschiedene Ansätze zur Aufgabenstellung zusammengetragen, welche sich gut in Erarbeitungsphasen eignen. Diese Methode ist vor allem in hinreichend offenen Aufgaben gut einsetzbar.
In der „Ich-Phase" beschäftigt sich der/die Lernende selbständig mit der Aufgabenstellung. Es geht dabei weniger um richtig oder falsch, sondern viel mehr um eigene Ideen, Fragen und Gedanken. Diese werden in der „Du-Phase" mittels Partnerarbeit ausgiebig besprochen und reflektiert. In dieser Phase werden die Ergebnisse der Ich-Phase überarbeitet und mit möglichen anderen Wegen erweitert. Erst dann beginnt die „Wir-Phase". Im Klassenplenum oder in Kleingruppen werden die Ergebnisse der Du-Phase gesammelt, verglichen und ausgewertet. Dabei kommen viele verschiedene Ansätze zusammen, worin der Vorteil dieser Methode liegt. (vgl. Büchter, Herget, Leuders, & Müller, 2010, S. 118ff)

4.3.4. Poster

„Auf einem „Mathematik-Poster“ werden die Ergebnisse einer längeren Auseinandersetzung mit einer Frage, einem Problem oder einem Phänomen präsentiert.“
(Barzel, Büchter, & Leuders, 2015, S. 160)

Ein Poster fasst erworbene Ergebnisse einer Arbeitsphase zusammen. Es dient zum Austausch und ist als Produkt einer Aufgabenstellung zu sehen. Sie können außerdem gut zur Ergebnissicherung eingesetzt werden. Beim Erstellen eines Posters liegt die Kommunikation und Kooperation der Gruppe im Fokus. Die Ergebnisse strukturiert und reduziert mit Hilfe des Posters zu erarbeiten gelingt nur, wenn Reflexionen durchgeführt, genaue Ausdrücke gesucht und aussagekräftig visualisiert und formuliert werden. Ist die Erarbeitungsphase abgeschlossen, sollten alle Poster präsentiert werden, wie beispielsweise bei einem *Museumsrundgang* oder einer Präsentation.
Bei der Gruppenarbeit eignen sich Poster als Sozialform. Bereits bei der Erstellung des Posters muss sich die Gruppe mit dem Thema gründlich auseinandersetzen, damit das Produkt dieser Gruppenarbeit hochwertig ist. Dazu ist es notwendig, dass sich alle Gruppenmitglieder im Vorfeld aktiv mit der Aufgabenstellung beschäftigen, ihre Vorstellungen den anderen Gruppenteilnehmer*innen gut präsentieren, damit das gewünschte und aussagekräftige Poster gemeinsam erstellt werden kann. Außerdem fördert diese Methode nicht nur bei der Erstellung, sondern auch bei einem längerfristigen Aushang die Auseinandersetzung mit diesem Thema. Zudem wird auch die soziale und personale Kompetenz gefördert. (vgl. Büchter, Herget, Leuders, & Müller, 2010, S. 160ff)

5. Materialien

Im folgenden Kapitel werden drei Workshops des Mini Talente Clubs genauer beschrieben. Sowohl die Thematik als auch die Materialien werden in den Kapiteln erläutert und mittels didaktischer Analyse diskutiert. Weiters finden sich auch ein Ablauf des jeweiligen Kurses und Lösungsvorschläge zu den Aufgabenstellungen. Auch Hinweise für die Durchführung werden beschrieben, um den Einsatz in anderen Formaten zu ermöglichen.

5.1. Fermi-Aufgaben

Fermi-Aufgaben eignen sich besonders gut für außerschulische Enrichment-Programme wie dem Mini Talente Club. Sie bieten offene, komplexe Aufgabenstellungen, wodurch den Kindern viel Spielraum für entdeckendes und selbstbestimmtes Lernen ermöglicht wird. Die Kinder bestimmen während des Lösens einer Fermi-Aufgabe selbständig die Art und Weise des Herangehens an die Aufgabenstellung und erarbeiten unterschiedliche Lösungsmöglichkeiten. Weiters ermöglichen Fermi-Aufgaben auch eine Bearbeitung in unterschiedlichen Sozialformen. (vgl. Käpnick, 2014, S. 111)

Um den Kurs im Mini Talente Club näher beschreiben zu können, ist es zuerst notwendig, Fermi-Aufgaben zu erläutern.

5.1.1. Woher kommen Fermi-Aufgaben?

Der Name „Fermi-Aufgabe“ geht auf den italienischen Kernphysiker Enrico Fermi zurück. Er wurde 1901 in Rom geboren. Bereits mit 17 Jahren begann er das Physikstudium, welches er 1922 beendete. Sein Forschungsgebiet beschäftigte sich unter anderem mit dem Beschuss von Atomkernen mit Neutronen. Dies führte zur Entdeckung der Kernspaltung, womit ein wesentlicher Beitrag zum Bau der ersten Atombombe geleistet wurde. Durch diese Entdeckung erhielt Enrico Fermi 1938 den Nobelpreis für Physik. Direkt nach der Verleihung floh er gemeinsam mit seiner Frau und seinen beiden Kindern vor dem Mussolini-Regime aus Kopenhagen in die USA. Dort beteiligte er sich, wie viele seiner Kolleg*innen, am Manhattan-Projekt, dem Bau der Atombombe. Im Rahmen dieses Projekts gelang ihm mit seinen Mitarbeitern 1942 die erste kontrollierte Kettenreaktion in einem Kernreaktor. Neben seiner

Forschungstätigkeit lehrte Fermi im Laufe seines Lebens an diversen Universitäten. Die nach ihm benannten Aufgaben machten ihn auch unter seinen Kolleg*innen und Studierenden bekannt. Seine nicht der „Norm“ entsprechenden Lösungswege konnten immer gut nachvollzogen werden. Beispielsweise konnte aus dem Flug einiger Papierschnipsel die Sprengkraft der Bombe bei ihrem ersten Test relativ genau eingeschätzt werden. Fermi zog direkte, eher provisorisch wirkende Lösungswege oft den „eleganteren“, feinsinnigen und aufwändigen Methoden vor. Diese Fähigkeit wollte Fermi unbedingt an seine Studierenden weitergeben, was ihn zur Entwicklung solcher „Fermi-Fragen“ bewog. Enrico Fermi sagte, dass jeder vernünftig denkende Mensch zu jeder Frage auch eine Antwort finden müsse. Er stellte aus diesen Beweggründen sehr oft solche Fragen, bei denen es darum ging, schnell gute Abschätzungen zu machen, um ein Ergebnis in der richtigen Größenordnung zu erhalten. (vgl. Büchter, Herget, Leuders, & Müller, 2010, S. 3ff)

Die wohl populärste und meist zitierte Frage lautet: „*Wie viele Klavierstimmer gibt es in Chicago?*“
Das Finden einer Lösung dieser Frage ist ein Paradebeispiel für Modellierung.
Zunächst scheint die Frage nicht lösbar zu sein. Wenn jedoch die Frage in Unterprobleme aufgespalten wird und einige plausible Annahmen getroffen werden, gelangt man schnell zu einer guten Näherung. (vgl. Greefrath, Kaiser, Blum, & Borromeo Ferri, 2013, S. 29f)
Fermi schätzt die Einwohner von Chicago auf etwa 3 Millionen und die Größe einer durchschnittlichen Familie auf vier Personen. Laut seinen Annahmen besitzt etwa jede dritte Familie ein Klavier. Also gibt es 250 000 Klaviere in der Stadt. Weiterhin geht er von einer Klavierstimmung alle 10 Jahre aus, wodurch sich eine Anzahl von 25 000 Klavierstimmungen pro Jahr ergibt. Geht man davon aus, dass ein Klavierstimmer 4 Stimmungen pro Tag durchführen kann, kommt man bei 250 Arbeitstagen im Jahr auf 1 000 Klaviere. Also braucht Chicago etwa 25 Klavierstimmer. (vgl. Büchter, Herget, Leuders, & Müller, 2010, S. 3)

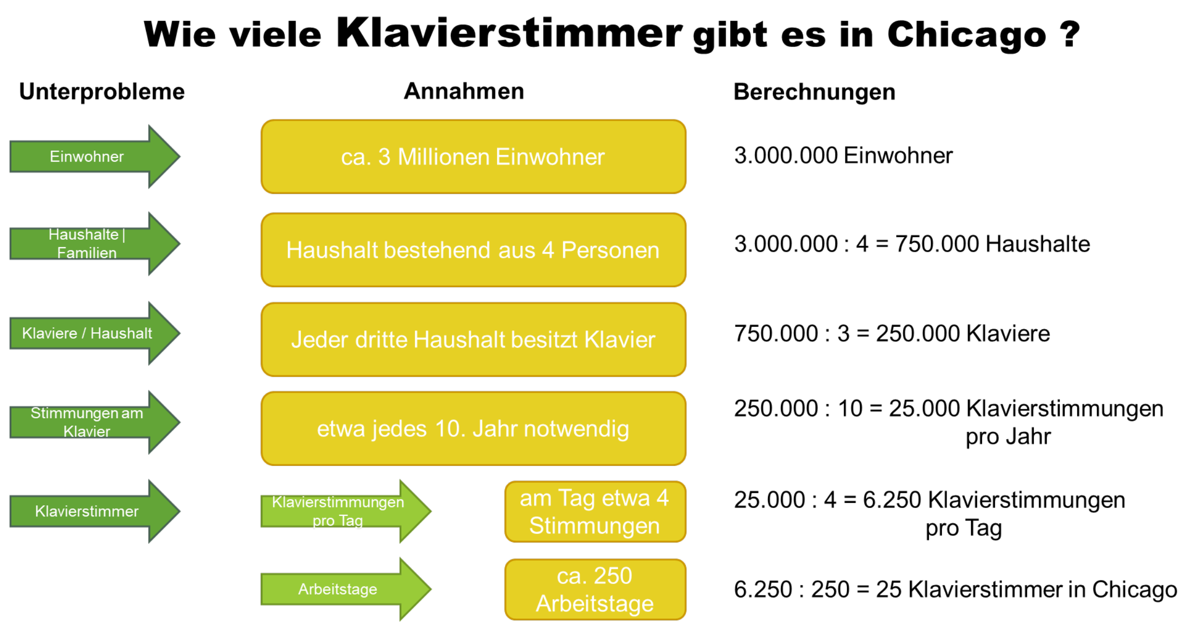


Abbildung 7: mögliche Modellierung zu „*Wie viele Klavierstimmer gibt es in Chicago?*“

Es ist anzumerken, dass diese Lösung nicht besonders genau ist, es könnten genauso gut nur 10 oder sogar 100 sein. Wichtig bei der Findung einer Lösung ist die Erkenntnis, dass man auf unterschiedlichste Wege trotzdem zu einer Näherung gelangt, die „im richtigen Bereich liegt“. Fermi-Aufgaben sind also damit charakterisiert, dass ausreichend genaue Abschätzungen angenommen werden müssen, um überhaupt zu einer möglichen Lösung zu kommen. (vgl. Haberzettl, Klett, & Schukajlow, 2018, S. 33)

5.1.2. Definition von Fermi-Aufgaben

Fermi-Aufgaben werden laut *Greefrath* (2013, S. 29) folgendermaßen definiert:

> *„Fermi-Aufgaben sind im Prinzip unterbestimmte offene Aufgaben mit klarem Endzustand aber unklarem Anfangszustand sowie unklare Transformation, bei denen die Datenbeschaffung – meist durch mehrfaches Schätzen – im Vordergrund steht.“*

Durch die realitätsbezogenen Aufgabenstellungen sind sie neben der Herausforderung beim Modellieren und Lösen auch anregend bei der Verwendung von Mathematik in der Welt. Die sehr offen gehaltenen Fragestellungen beschränken nicht in der Lösungsfindung und geben weder eine bestimmte Lösung, noch einen

„richtigen“ Lösungsweg vor. Durch diese speziellen Fragestellungen wird der Begriff „Fermi-Aufgabe“ oft als Synonym für offene Fragestellungen verwendet, gleichzeitig handelt es sich bei solchen Aufgabenstellungen um komplexe Schätzaufgaben. (vgl. Greefrath, Kaiser, Blum, & Borromeo Ferri, 2013, S. 18)

Weiters definieren *Büchter et. al.* (2010) Fermi-Aufgaben als jene, bei denen weniger das Rechnen, sondern vielmehr die anderen Schritte des Modellierens und Vereinfachens im Vordergrund stehen. Dazu zählt vor allem das „Übersetzen“ eines Problems in die mathematische Sprache.

Diese Arbeitsweise scheint bei den ersten Versuchen, eine Lösung zu erarbeiten, sehr ungewohnt. Werte einzuschätzen und diese mehrmals zu hinterfragen, also ein mathematisches Modell zur Fragestellung zu entwickeln, fällt bei den ersten Fermi-Aufgaben sehr schwer. Nach mehreren Bearbeitungen solcher Fragestellungen fallen solche Modellierungen wesentlich leichter.

Durch die Tatsache, dass Fermi-Aufgaben den Modellierungsprozess viel mehr ins Zentrum rücken, wird auch das Alltagswissen, etwa das Treffen plausibler Annahmen, die Recherche und Auswertung von Daten sowie die Wahl mathematischer Mittel vermehrt gefördert. Weiters wird auch die Kompetenz, kritisch zu hinterfragen und selbständig Fragen zu stellen, angeregt. (vgl. Büchter, Herget, Leuders, & Müller, 2010, S. 6)

5.1.3. Die Modellierung und der Modellierungskreislauf

Mathematische Modellierung besteht hauptsächlich darin, zunächst das Problem aus der Realität in die Mathematik zu übersetzten. Man bearbeitet dieses „mathematische Problem“ mit mathematischen Methoden, um schlussendlich mittels kritischen Hinterfragens die mathematische Lösung auf das reale Problem zu übertragen.

Auch bei Fermi-Aufgaben wird diese Art der Lösungsfindung – nämlich durch Modellieren – in den Mittelpunkt gerückt.

Nach *Greefrath* (2018) werden Anwendungen in der Mathematik eher als Richtung von der Mathematik ausgehend in die Realität bezeichnet, wohingegen beim Modellieren genau die umgekehrte Herangehensweise gemeint wird. Mit Sachrechnen, wo auch Fermi-Aufgaben ein Teilgebiet sind, werden beide Richtungen umfasst. (vgl. Greefrath, 2018, S. 33f) Modellierung wird auch als Synonym für Sachrechnen verwendet (vgl. Haberzettl, Klett, & Schukajlow, 2018, S. 33).

Meist wird der Modellierungsprozess idealisiert als Kreislauf dargestellt. Dazu gibt es verschiedene Kreislaufmodelle, die sich je nach Fokus und Definition unterscheiden. Die Kreisläufe werden während dem Lösungsprozess nie starr durchlaufen. Zwischen den verschiedenen Stationen wird flexibel hin und her gewechselt. (vgl. Greefrath, 2018; Greefrath, Kaiser, Blum, & Borromeo Ferri, 2013, S. 14)
Folgend wird ein Modellierungskreislauf nach *Blum und Leiß (2005)* genauer betrachtet, welcher in der Mathematikdidaktik am verbreitetsten ist.

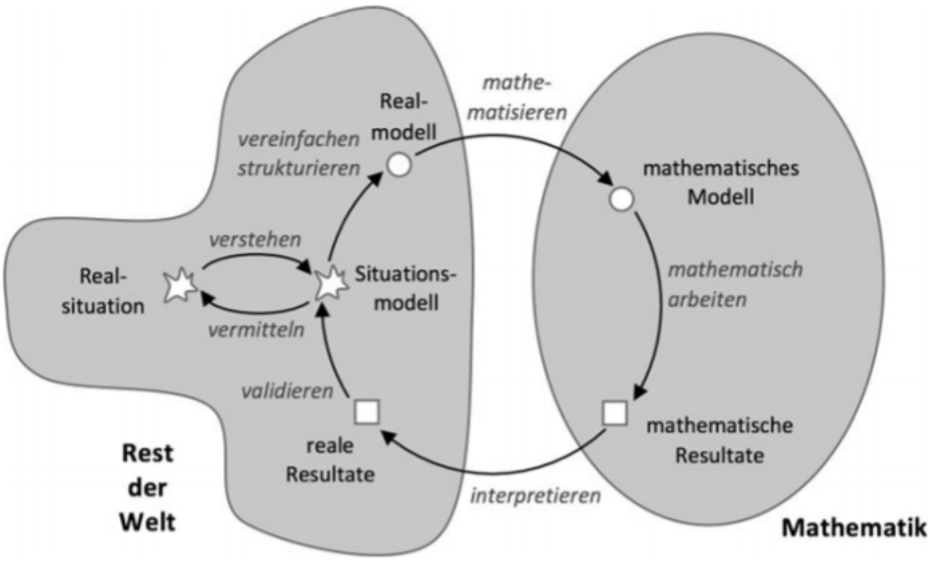


Abbildung 8: Modellierungskreislauf nach Blum und Leiß (2015) (vgl. Greefrath, 2018, S. 41)

Zu Beginn eines Modellierungsproblems steht eine Realsituation, welche bearbeitet werden soll. Der erste Schritt besteht darin, das ***Realproblem*** zu verstehen und, falls notwendig, Fragen zu formulieren. Dabei werden wichtige Informationen aus der Angabe entnommen und meist auch vorhandenes Vorwissen eingesetzt. Nach und nach entsteht so ein ***Situationsmodell***. Als weiteren Schritt werden die gesammelten Daten strukturiert und vereinfacht, was eine Mathematisierung des Situationsmodells zum Ziel hat. Wichtige und unwichtige Daten werden voneinander getrennt. Des Weiteren wird in dieser Phase auch hinterfragt, welche Daten noch fehlen und welche Annahmen getroffen werden müssen. Es bildet sich ein ***Realmodell*** ab. Im folgenden Schritt wird dieses in ein ***mathematisches Modell*** übersetzt, mit dem mathematisch gearbeitet wird. Dabei werden mathematisches Wissen und Strategien eingesetzt, um eine ***mathematische Lösung*** zu erhalten. Es ist hier anzumerken, dass das zur Verfügung stehende mathematische Wissen individuell zur Lösungsfindung angewendet wird und sich somit und sich somit die Lösungswege ein und desselben

Ausgangsproblems je nach Vorwissen unterscheiden. Durch Interpretieren wird die mathematische Lösung im folgenden Schritt auf die Realsituation bezogen, eine ***reale Lösung*** entsteht. Im Weiteren wird diese Lösung auf Plausibilität geprüft, die Ergebnisse werden validiert und so auf das ***Situationsmodell*** zurückgeführt. Hier ist es wichtig, den Modellierungskreislauf weiterzuführen, um eventuelle Fehlannahmen kritisch zu hinterfragen und falls notwendig, Teilschritte oder den gesamten Modellierungsprozess erneut zu durchlaufen. Die Diskussion und die Ausarbeitung des Lösungsweges als letzter Schritt ist so angelegt, dass die Ergebnisse für andere nachvollziehbar werden. (vgl. Greefrath, 2018, S. 37ff; Haberzettl, Klett, & Schukajlow, 2018, S. 32f)

5.1.4. Lehrplan und Kompetenzen

Lehrplan

Im allgemeinen Teil des AHS-Lehrplans ist bereits im gesetzlichen Auftrag der Schule festgehalten, dass die Schule beim *Erwerb von Wissen, bei der Entwicklung von Kompetenzen und bei der Vermittlung von Werten* mitzuwirken hat. Die *Bereitschaft zum selbständigen Denken und zur kritischen Reflexion* ist besonders zu fördern.
Des Weiteren sollen Lernende dabei unterstützt werden, *eine eigene Persönlichkeit* zu entwickeln. In den Aufgabenbereichen der Schule wird Folgendes festgehalten:

> *„Die Schülerinnen und Schüler sollen sich in altersadäquater Form mit Problemstellungen auseinander setzen, Gegebenheiten kritisch hinterfragen, Probleme erkennen und definieren, Lösungswege eigenständig suchen und ihr eigenes Handeln kritisch betrachten.“ (Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne – allgemeinbildende höhere Schulen, 2021)*

Genau diese Fähigkeiten werden insbesondere beim Modellieren einer Aufgabenstellung, und somit auch bei Fermi-Aufgaben, unterstützt und gefördert.
Auch im *Bildungsbereich Natur und Technik* wird von Verständnis für Phänomene, Fragen und Problemstellungen aus dem MINT-Bereich gesprochen, welches durch grundlegendes Wissen, Entscheidungsfähigkeit und Handlungskompetenz durch den Unterricht zu vermitteln ist. Es wird unterstrichen, dass Formalisieren, Modellbilden sowie auch Abstraktions- und Raumvorstellungsvermögen zu vermitteln sind.

Im Lehrplan für Mathematik wird im Punkt *Bildungs- und Lehraufgaben* noch einmal hervorgehoben, dass mathematisches Wissen und Können vielseitig eingesetzt und verknüpft werden soll und dass mathematisches Modellieren zu einem reflektierten und verantwortungsvollen Umgang mit Aussagen aus der Umwelt führen soll. Lernende sollen im Zuge des Mathematikunterrichts die Möglichkeit bekommen, geistiges Arbeiten, Argumentieren, kritisches Denken, Modelle, Darstellungen und Interpretationen selbständig zu generieren. Außerdem sollen sie verschiedene Lösungswege und -schritte durch die in der Mathematik üblichen Arbeitsschritte selbständig ausprobieren und durchführen. (vgl. Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne – allgemeinbildende höhere Schulen, 2021)

Es ist also hervorzuheben, dass die Modellierung und im weiteren Sinn Fermi-Aufgaben im österreichischen Lehrplan des Öfteren vermerkt ist.

Kompetenzen

Im Abschnitt 2 der Verordnung über die Bildungsstandards in Österreich wird als erster Kompetenzbereich der 4. Schulstufe in Mathematik die Modellierung behandelt.

> *„Eine Sachsituation in ein mathematisches Modell (Terme und Gleichungen) übertragen, diese lösen und auf die Ausgangssituation beziehen*
>
> *Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler können*
> *…aus Sachsituationen relevante Informationen entnehmen,*
> *…passende Lösungswege finden,*
> *…die Ergebnisse interpretieren und sie überprüfen.*
> *Ein mathematisches Modell in eine Sachsituation übertragen*
> *Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler können zu Termen und Gleichungen Sachaufgaben erstellen“*
> *(Österreich, Gesamte Rechtsvorschrift für Bildungsstandards im Schulwesen, 2021)*

Ebenso kommt die Modellierung im Kompetenzbereich *„Arbeiten mit Ebene und Raum“* in Bezug auf das Erkennen, Benennen und Darstellen geometrischer Figuren vor.

Weiters findet sich die Modellierung auch in Abschnitt 3 der Verordnung über die Bildungsstandards der 8. Schulstufe in Österreich.

Dabei werden die Handlungsbereiche **„Darstellen, Modellbilden“** und **„Argumentieren, Begründen“** in mehrere Kategorien eingeteilt. Zum einen beziehen sich die Kompetenzen der Modellierung auf *Zahlen und Maße*, *Variablen, funktionale Abhängigkeiten*, *geometrische Figuren und Körper* aber auch auf *statistische Darstellungen und Kenngrößen*. (vgl. Gesamte Rechtsvorschrift für Bildungsstandards im Schulwesen, 2021)

5.1.5. Workshop: Fermi-Aufgaben

- Thema: mathematische Modellierung im Alltag
- Dauer: 2-4 Einheiten á 60 Minuten (120-240 Minuten)
- Material:
    - Aufgabenstellung (Kärtchen)
    - Stifte, Lineal und Bastelmaterial
    - Flip-Chart Papier

Voraussetzungen:

Für die Bearbeitung von Fermi-Aufgaben sind keine bestimmten mathematischen Inhalte notwendig, es werden die Grundrechnungsarten und kreative Lösungsvorschläge benötigt. Es wäre vorteilhaft, wenn die Teilnehmer*innen bereits im Vorfeld solche (oder ähnliche) Aufgabenstellungen gelöst haben, ist aber nicht Voraussetzung für diesen Workshop.

Lehr- und Lernziele

Die Teilnehmer*innen sollen …

- … selbständig Überlegungen tätigen, Informationen beschaffen und Abschätzungen machen können.
- … den eigenen Lösungsweg argumentieren, präsentieren und erklären können.
- … systematisch arbeiten und Probleme lösen können.

Konzeption

Eine Gruppe von 3-4 Kindern bekommt eine Fermi-Aufgabe zum selbständigen Lösen vorgelegt (Gruppenarbeit). Dabei sollen sie die Teilschritte der mathematischen Modellierung kennen lernen und als Team erarbeiten. Während der Erarbeitungsphase sind die Kursleiter*innen lediglich als Beobachter und als Hilfestellung bei Fragen zur Problemstellung tätig. Vorwiegend beobachten die

Kursleiter*innen die Gruppen beim Erstellen des eigenen Lösungsweges und geben genügend Freiraum, diesen Lösungsweg auch mit etwaigen Umwegen durchzugehen. Als Ergebnissicherung dient ein Poster (siehe Methoden), welches sie bei der Abschlussveranstaltung des Clubs den Eltern bei einem Museumsrundgang präsentieren.

Im Folgenden werden die Teilschritte, welche bei den Fermi-Aufgaben als Hilfestellung dienen, aufgelistet und eine Verknüpfung zum Modellierungskreislauf hergestellt.

Tabelle 3: Teilschritte der mathematischen Modellierung (vgl. Haberzettl, Klett, & Schukajlow, 2018, S. 34)

Teilschritte der Kinder	**Teilkompetenz des Modellierens**
Was will ich herausfinden?	Konstruieren / Verstehen
Welche Angaben brauche ich zum Lösen?	Vereinfachen / Strukturieren und Mathematisieren
Berechnung der Aufgabe	Mathematisieren und mathematisch arbeiten
Was bedeutet mein Ergebnis?	Interpretieren
Kann meine Lösung stimmen?	Validieren
Wie habe ich gerechnet und warum?	Darlegen und Erklären
Besprechen der Ergebnisse	

Aufbau

Zu Beginn gibt es eine kurze Einführung zum Kurs durch die Leiter*innen. Dabei wird ein ungefährer Fahrplan zum Ablauf gegeben und auf Fermi genauer eingegangen. Im Fokus steht dabei, wer Fermi war, woher er kommt und was Fermi-Aufgaben sind. Im Plenum wird im Zuge der Einführung ins Thema eine Fermi-Aufgabe (vgl. Abbildung 7: mögliche Modellierung zu „*Wie viele Klavierstimmer gibt es in Chicago?*“) vorgezeigt und im Anschluss gemeinsam eine Fermi-Aufgabe gelöst (z.B. „Wie viele Zahnärzte gibt es in Österreich?“). Der Einstieg und die Überleitung in ein gemeinsames Lösen dieser Fermi-Aufgabe passiert als kurzer Sketch der Leiter*innen. Anhand der eigenen Erfahrungen und eventuellen Recherchen sind die Teilnehmer*innen nun angehalten, einen möglichen Lösungsweg zur erarbeiten. Durch das gemeinsame Lösen dieser Aufgabenstellung bekommen die Teilnehmer*innen einen Einblick in die Teilschritte des mathematischen Modellierens (vgl. Tabelle 3: Teilschritte der mathematischen

Modellierung), welche sie bei den später folgenden Problemstellungen selbständig anwenden können.

Die Einführungsphase sollte nicht länger als 30 Minuten dauern, sodass genügend Zeit für die gemeinsame Erarbeitung der Fermi-Aufgaben bleibt, für welche etwa 20 Minuten eingeplant werden sollen.

Durch Gruppenbildung beginnt nun die eigenständige Arbeitsphase der Teilnehmer*innen. Dazu bekommt jede Gruppe ein Fermi-Kärtchen, worauf die Aufgabe beschrieben ist, und ausreichend Material zur Gestaltung des Posters. Zur Ausarbeitung ist die Gruppe nicht an den Platz gebunden und darf sich frei im Kurs-Bereich bewegen. Sie dürfen sich frei im Kurs-Bereich bewegen. In dieser Arbeitsphase werden die vorher durchgearbeiteten Tabelle 3: Teilschritte der mathematischen Modellierung abgehandelt. Die Daten- und Informationsbeschaffung wird jeder Gruppe freigestellt. Recherchen in Büchern und dem Internet werden von den Kursleiter*innen betreut. Schätzungen, Berechnungen und der Bezug zum Alltagswissen werden vorwiegend durch die Teilnehmer*innen selbständig ausgeführt. Nach Fertigstellung der ersten Abschätzungen und Rechenschritte werden diese mit den Kursleiter*innen besprochen. Dadurch treten jene Denk- und Rechenschritte in den Vordergrund, welche wesentlich für den individuellen Lösungsweg sind und auf dem Poster festgehalten werden sollen.

Nach Fertigstellung des Posters wird eine Präsentation der Lösungen im Plenum vorgenommen und im Zuge dessen über den Lösungsweg diskutiert, wobei immer zu betonen ist, dass es weitere mögliche Lösungswege für jede Fermi-Aufgabe gibt. Diese Präsentation im Plenum dient gleichzeitig als Übung zur Präsentation bei der Abschlussveranstaltung, wo die gestalteten Poster als Museumsrundgang den Eltern vorgestellt werden.

5.1.6. Dokumentation

Nachfolgend einige Lösungsvorschläge aus dem Mini Talente Club von 8-10 jährigen Kindern:

Aufgabe: Aus der Tube

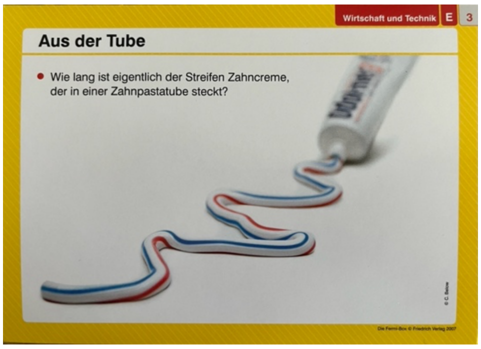


Abbildung 9: Aus der Tube
(Büchter, Herget, Leuders, & Müller, 2010)

In der eigenständigen Arbeitsphase hat sich eine Gruppe die Frage „Wie lang ist eigentlich der Streifen Zahncreme, der in einer Zahnpastatube steckt?“ ausgewählt. Bereits nach kurzer Zeit wurden die Leiter*innen gefragt, ob diese Fragestellung auch durch ein Experiment ausprobiert werden kann. Für diese Fragestellung standen zwei Tuben Zahncreme zur Verfügung, wobei eine am Ende der Berechnung zur Validierung der Ergebnisse diente, die andere als Hilfestellung zu den Berechnungen. Zu Beginn wurden alle Daten, die zur Berechnung notwendig waren, von der Tube abgelesen (z.B. Länge, Durchmesser, Menge,…). Im Weiteren wurde überlegt, wie die Zahncreme am besten mathematisch modelliert werden kann. Die Teilnehmer*innen eigneten sich in diesem Arbeitsschritt durch die Hilfe der Leiter*innen die Volumenberechnung von Zylindern an, nachdem eine Abschätzung durch einen Quader, dessen Berechnung aus der Schule schon bekannt war, der Gruppe nicht ausreichte. Durch den Austausch in der Gruppe wurde eine Abschätzung der Dicke (Durchmesser) der Zahncreme-Schlange angenommen. Mit diesen Daten konnte eine Länge von 150 cm ermittelt werden.

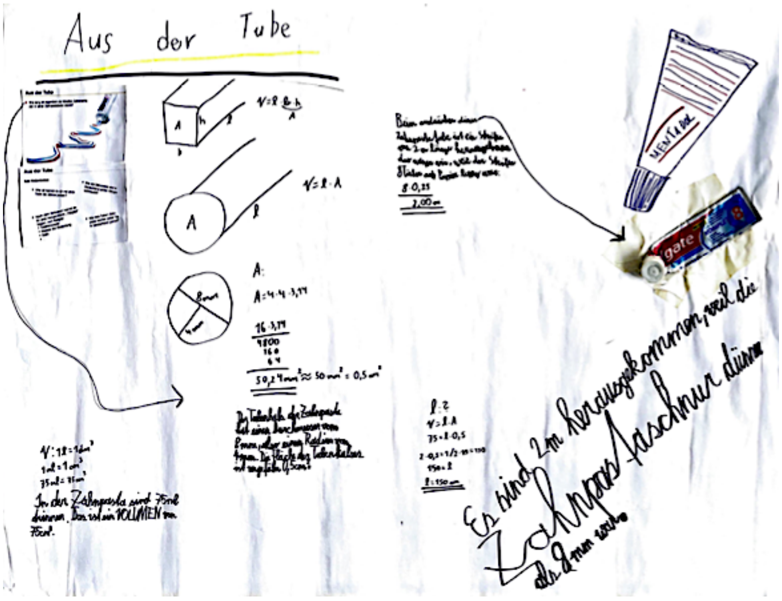


Abbildung 10: Plakat der Gruppe: Aus der Tube

Nach der Berechnung wurde das Ergebnis durch ein Experiment der Kinder überprüft. Aus der Tube kam eine Schlange von ca. zwei Metern heraus, welche von den Kindern durch eine ungleichmäßige und dünnere Schlange als angenommen begründet wurde.

Abbildung 11: Experiment Zahncreme-Schlange

Aufgabe: Nagellack für den Riesenfuß

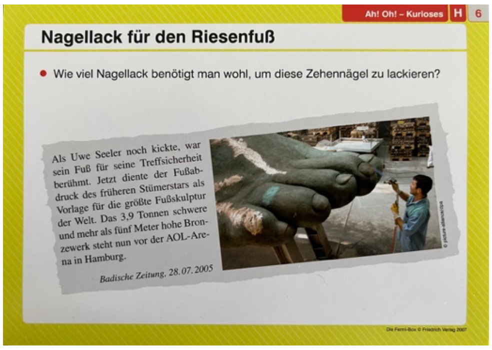


Abbildung 12: Nagellack für den Riesenfuß (Büchter, Herget, Leuders, & Müller, 2010)

In der eigenständigen Arbeitsphase hat sich eine Gruppe die Frage „Wie viel Nagellack benötigt man wohl, um diese Zehennägel zu lackieren?“ ausgewählt. Auch für diese Gruppe standen verschiedene Nagellacke als Hilfestellung zur Datenerhebung und Berechnung bereit. Die notwendigen Daten wurden skizziert, um ein besseres Größenverhältnis zu erlangen. Weiters wurde abgeschätzt, wie viel Nagellack für den eigenen Zehennagel bzw. einen Zehennagel von Erwachsenen benötigt wurde. Die Flächen wurden dabei als Oval modelliert, aber zur Vereinfachung als Rechteck berechnet. Alle berechneten Werte wurden kleiner geschätzt, da die Ecken im Modell abgerundet wurden. Außerdem wurden die verschiedenen Größen der Zehennägel berücksichtigt, wodurch sich eine Gesamtmenge von 580 ml Nagellack ergab.

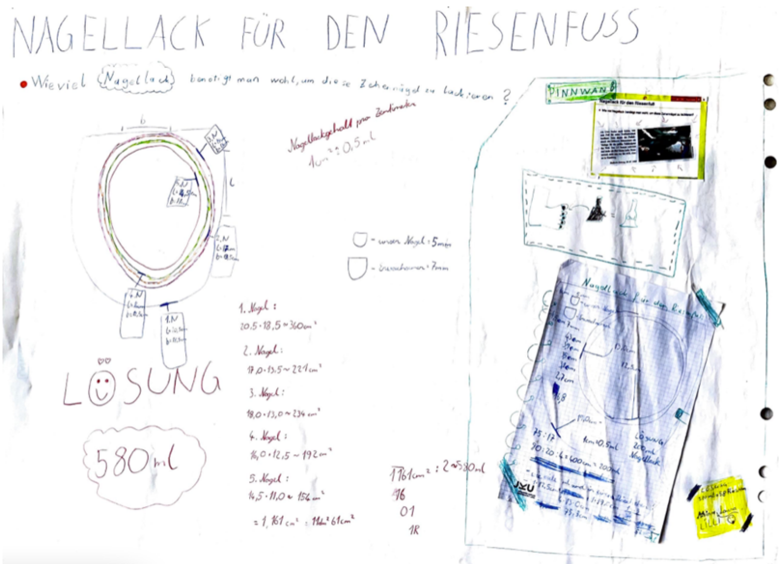
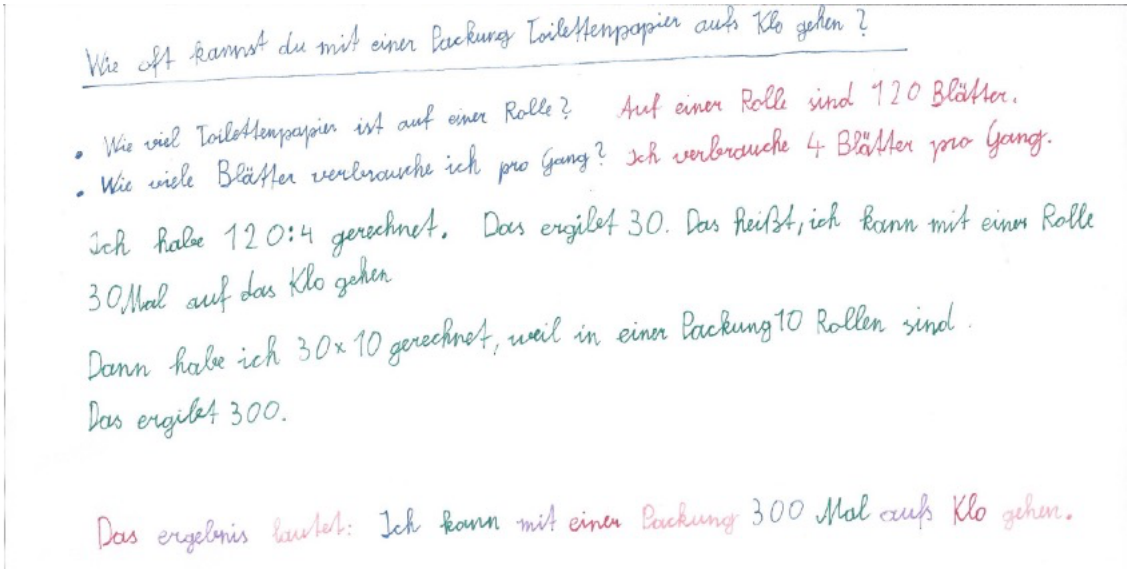


Abbildung 13: Plakat der Gruppe: Nagellack für den Riesenfuß

Nach der Berechnung wurde das Ergebnis den anderen Gruppen präsentiert. Dabei wurde vor allem die Unterscheidung des Flächeninhaltes von Kindernägeln zu Erwachsenennägeln hervorgehoben. Die Frage, wie oft die Zehennägel lackiert werden können, also wie viele Schichten es gibt, blieb offen.

Aufgabe: Toilettenpapier

Nachdem die Fermi-Aufgaben den Kindern so viel Spaß bereiteten, wurde eine weitere Aufgabe zur Fragestellung „Wie oft kannst du mit einer Packung Toilettenpapier (10 Stück Rollen) aufs Klo gehen?“ als freiwillige Übung für zuhause aufgeschrieben. Neben der Datenerhebung wurde die Berechnung selbständig durchgeführt. Im darauffolgenden Workshop wurden folgende Resultate von den Kindern präsentiert:



Wie oft kannst du mit einer Packung Toilettenpapier aufs Klo gehen?

- Wie viel Toilettenpapier ist auf einer Rolle? Auf einer Rolle sind 120 Blätter.
- Wie viele Blätter verbrauche ich pro Gang? Ich verbrauche 4 Blätter pro Gang.

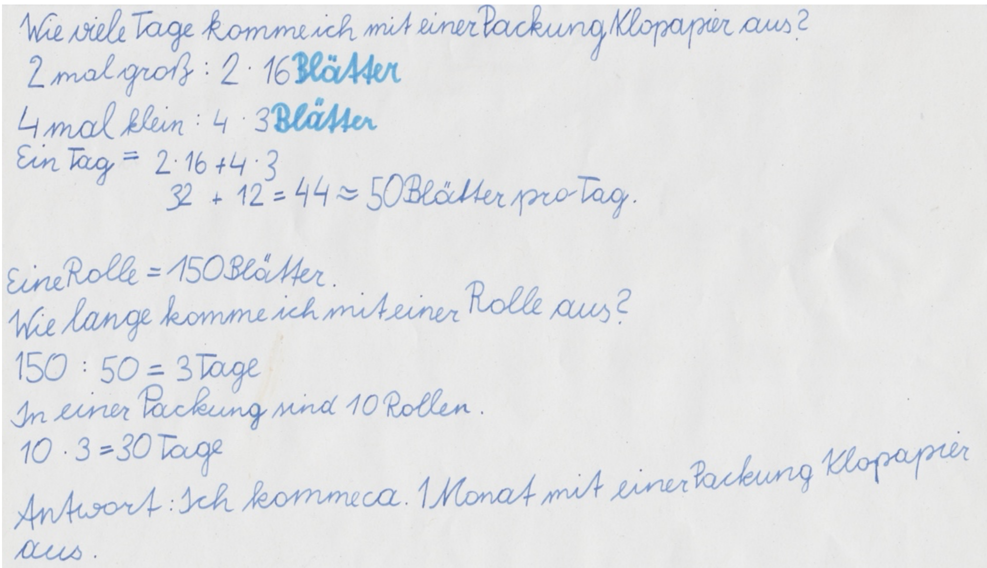
Ich habe 120:4 gerechnet. Das ergibt 30. Das heißt, ich kann mit einer Rolle 30 Mal auf das Klo gehen.

Dann habe ich 30×10 gerechnet, weil in einer Packung 10 Rollen sind.

Das ergibt 300.

Das ergebnis lautet: Ich kann mit einer Packung 300 Mal aufs Klo gehen.

Abbildung 14: Berechnung Klopapier Alexander (9 Jahre)



Wie viele Tage komme ich mit einer Packung Klopapier aus?
2 mal groß : 2 · 16 Blätter
4 mal klein : 4 · 3 Blätter
Ein Tag = 2 · 16 + 4 · 3
32 + 12 = 44 ≈ 50 Blätter pro Tag.

Eine Rolle = 150 Blätter.
Wie lange komme ich mit einer Rolle aus?
150 : 50 = 3 Tage
In einer Packung sind 10 Rollen.
10 · 3 = 30 Tage
Antwort: Ich komme ca. 1 Monat mit einer Packung Klopapier aus.

Abbildung 15: Berechnung Klopapier Sarah (9 Jahre)

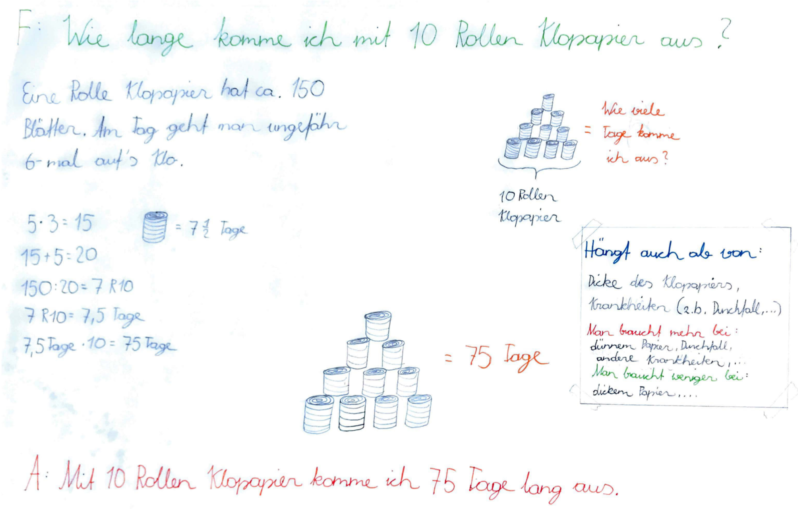


Abbildung 16: Berechnung Klopapier Laura (9 Jahre)

Bei allen drei Berechnungen liegt es vor allem an den grundverschiedenen Annahmen der Kinder, dass die Ergebnisse wesentlich voneinander abweichen. Wichtig bei der Präsentation war jedoch, dass alle Lösungswege ihre Berechtigung und Richtigkeit aufweisen, was jedem Kind gelang. Bei der zweiten Lösung (Sarah) wurde eine extra Toilettenrolle verwendet, um die Daten zur Berechnung zu erforschen. Bei der dritten Lösung (Laura) wurden außerdem weitere Abhängigkeiten definiert.

5.2. Zahlentheorie – Das Sieb des Eratosthenes

Das Sieb des Eratosthenes ist wohl eines der bekanntesten und ältesten Verfahren, um Primzahlen zu erkennen. Primzahlen finden heute Anwendung im Austausch von Daten, im Besonderen der Verschlüsselung von Daten (z. B. RSA-Algorithmus). Die bisher größten derzeit bekannten Primzahlen sind

$$2^{77\,232\,917}-1 \text{ und } 2^{82\,589\,933}-1$$

Die Suche nach immer größeren Primzahlen ist eine „Rekordjagd", die in nächster Zeit nicht enden wird.

Um den Workshop im Mini Talente Club näher beschreiben zu können, ist es zuerst notwendig, den mathematischen Hintergrund zu erläutern.

5.2.1. Mathematischer Hintergrund

Teiler

Definition:

Für $a, b \in \mathbb{N}$ heißt a ein **Teiler**, wenn ein $q \in \mathbb{Z}$ existiert, sodass $b = q \cdot a$.

Die Kurzschreibweise dafür ist $a|b$ und es wird gesprochen als „a ist Teiler von b" bzw. auch „a teilt b"

Satz:

Für $a, b, c \in \mathbb{N}$ gilt:

- $1|a$
- $a|a$
- Wenn $a|b$ und $b|c$, dann auch $a|c$ (Transitivität)

Beweis:

- Nach vorheriger Definition gilt $a = a \cdot 1$ und daher gilt $1|a$ für $a \in \mathbb{Z}$
- Nach vorheriger Definition gilt $a = 1 \cdot a$ und daher gilt $a|a$ für $a \in \mathbb{Z}$
- Mit $a|b$ existiert ein $q_1 \in \mathbb{N}$ mit $b = q_1 \cdot a$ und mit $b|c$ existiert ein $q_2 \in \mathbb{N}$ mit $c = q_2 \cdot b$ woraus man folgendes erhält:

  $$c = q_2 \cdot b = q_2 \cdot (q_1 \cdot a) = (q_2 \cdot q_1) \cdot a = q \cdot a$$

  $q = q_2 \cdot q_1$ existiert, da $\mathbb{N}$ bezüglich der Multiplikation abgeschlossen ist und es folgt $a|c$.

Die Teilerrelation wird üblicherweise in $\mathbb{Z}$ definiert, da der Gültigkeitsbereich von Definitionen und Sätzen in der Mathematik möglichst groß sein soll. Für die mathematischen Grundlagen des Workshops reicht der Definitionsbereich $\mathbb{N}$ aus.

Definition:

Für $a \in \mathbb{N}$ heißen 1 und a die **trivialen Teiler** von a. Teiler, die keine trivialen Teiler sind, heißen **echte Teiler**.

Für $a, b \in \mathbb{N}$ mit $b = q \cdot a$ heißt $q \in \mathbb{N}$ der **Komplementärteiler** zu a bezüglich b.

Satz:

Für $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ gilt:

- Wenn $a|b$ und $a|c$, dann $a|b \pm c$
- Wenn $a|b$, dann $a|c \cdot b$.
- Wenn $a|b$ und $c|d$, dann $a \cdot c|b \cdot d$ (Transitivität)

Beweis:

- Mit $a|b$ und $a|c$ existieren $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ mit $b = q_1 \cdot a$ und $c = q_2 \cdot a$, wodurch folgendes mit $q = q_1 \pm q2 \in \mathbb{Z}$ gilt:
  $$b \pm c = q_1 \cdot a \pm q_2 \cdot a = (q_1 \pm q_2) \cdot a = q \cdot a$$
  Nachdem $\mathbb{Z}$ bezüglich der Addition und Subtraktion abgeschlossen ist, folgt daraus $a|b \pm c$.
- Durch $a|b$ existiert ein $q_1 \in \mathbb{Z}$ mit $b = q_1 \cdot a$ und $c \in \mathbb{Z}$ konstant mit $q = c * q_1 \in \mathbb{Z}$, wodurch gilt: $c \cdot b = c \cdot (q_1 \cdot a) = (c \cdot q_1) \cdot a = q$ woraus $a|c \cdot b$ folgt.
- Mit $a|b$ und $c|d$ existiert ein $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ mit $b = q_1 \cdot a$ und $d = q_2 \cdot c$ woraus man mit $q = q_1 \cdot q_2 \in \mathbb{Z}$ folgendes erhält:
  $$b \cdot d = (q_1 \cdot a) \cdot (q_2 \cdot c) = (q_1 \cdot q_2) \cdot (a \cdot c) = q \cdot (a \cdot c)$$
  und daher gilt $a \cdot c|b \cdot d$.

Vielfache

Definition:

Für $a, b \in \mathbb{Z}$ heißt b ein Vielfaches von a, wenn eine Zahl $q \in \mathbb{Z}$ existiert, sodass $b = q \cdot a$.

Ist b ein Vielfaches von a, so ist a ein Teiler von b, und umgekehrt. Diese Eigenschaften folgen direkt aus jenen der Teilerrelation. Durch die Definition in $\mathbb{Z}$ gilt, dass für $a \in \mathbb{Z}$ 0 ein Vielfaches von a ist, wegen $0 = 0 \cdot a$.

Primzahlen

Definition:

Eine Zahl $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ heißt **Primzahl**, wenn sie nur die beiden positiven Teiler 1 und p besitzt. Dabei wird die Menge aller Primzahlen mit $\mathbb{P}$ bezeichnet.

Es scheint zunächst willkürlich, dass 1 keine Primzahl ist. Betrachtet man 1 als Primzahl, wäre die Primfaktorzerlegung nicht mehr eindeutig. 1 ist also weder eine zusammengesetzte Zahl (eine Zahl n, die neben 1 und ihr selbst noch weitere Teiler besitzt), noch eine Primzahl.
Besonders ist die Primzahl 2, die als einzige gerade Primzahl gilt, alle anderen Primzahlen sind ungerade. (vgl. Wittmann, 2020, S. 23f)

Für die Suche von Primzahlen existiert ein Algorithmus:

Das Sieb des Eratosthenes

Durch diesen Algorithmus kann in endlich vielen Schritten überprüft werden, ob es sich bei der gewählten Zahl um eine Primzahl oder um eine zusammengesetzte Zahl handelt.
Bereits Eratosthenes hat diesen Algorithmus im 3. Jahrhundert v. Chr. entdeckt, mit dessen Hilfe die Zahlen „ausgesiebt“ wurden.

1. Die Zahlen von 1 bis z.B. 100 werden notiert
2. 1 wird gestrichen, weil laut Definition 1 keine Primzahl ist.
3. 2 ist eine Primzahl.
   Alle Vielfachen von 2 werden gestrichen, da sie durch 2 teilbar sind und somit keine Primzahlen sind.
4. 3 ist eine Primzahl.
   Alle Vielfachen von 3 werden gestrichen, da sie durch 3 teilbar sind und somit keine Primzahlen sind.

5. 4 wurde bereits bei 3. gestrichen. Auch alle Vielfachen von 4 wurden in 3. schon gestrichen, da $4 = 2 \cdot 2$ gilt.
6. Streiche der Reihe nach alle Vielfachen der kleinsten übrig gebliebenen Zahl p, die größer als p sind.
7. Ende: $p \cdot p > 100$

Es werden also alle Vielfachen von 2, 3, 5, $7 < \sqrt{100}$ ausgesiebt.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Abbildung 17: Sieb des Eratosthenes für N = 100 (vgl. Wittmann, 2020, S. 23f)

Es ergeben sich die Primzahlen bis 100: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 und 97.

Satz:

Für eine natürliche Zahl $n \geq 2$ ist der kleinste von 1 verschiedene Teiler stets eine Primzahl.

Beweis:

Fall 1: Ist n eine Primzahl, dann hat n nur die beiden Teiler 1 und n. n ist der kleinste von 1 verschiedene Teiler.

Fall 2: ist n eine zusammengesetzte Zahl, dann besitzt n echte Teiler, die verschieden von 1 sind. Es gibt einen kleinsten echten Teiler, da jede Teilmenge von $\mathbb{N}$ ein kleinstes Element besitzt.

Durch einen Widerspruch wird weiters gezeigt, dass p eine Primzahl ist.

Annahme: p ist keine Primzahl.

Dann handelt es sich bei p um eine zusammengesetzte Zahl, welche mindestens einen echten Teiler $p' < p$ besitzt. Mit $n = q \cdot p'$ und der Transitivität folgt aus $p'|p$ und $p|n$, dass $p'|n$ und damit p' ein echter Teiler von n ist, was im Widerspruch dazu steht, dass p der kleinste echte Teiler von n ist. Daher ist p eine Primzahl.

Satz:

Für eine natürliche Zahl n gilt: n ist genau dann eine zusammengesetzte Zahl, wenn es eine Primzahl p gibt mit $p \leq \sqrt{n}$ und $p|n$.

Beweis:

$\Longrightarrow$ Wenn n eine zusammengesetzte Zahl ist, dann ist nach vorherigen Satz der kleinste echte Teiler von n eine Primzahl p.

Annahme: $p > \sqrt{n}$

Dann ist der zu p komplementäre Teiler q kleiner als $\sqrt{n}$, was im Widerspruch dazu steht, dass p der kleinste echte Teiler von n ist. Es folgt also: $p \leq \sqrt{n}$

$\Longleftarrow$ Wenn es zu n eine Primzahl p gibt, für die gilt $p \leq \sqrt{n}$ und $p|n$, dann ist insbesondere $p < n$. Demnach hat n den echten Teiler p und ist damit eine zusammengesetzte Zahl.

Dieser Satz begründet die Vorgehensweise beim Sieb des Eratosthenes. Ist n eine zusammengesetzte Zahl (also keine Primzahl), dann ist sie ein Vielfaches der Primzahl p, für die $p \leq \sqrt{n}$ und $p|n$ gilt. n wird also im Laufe des Algorithmus als Vielfaches von p gestrichen. Ist n hingegen eine Primzahl, dann existiert keine Primzahl p mit $p \leq \sqrt{n}$ und $p|n$. n wird somit im Laufe des Algorithmus nicht gestrichen und bleibt als Primzahl „im Sieb übrig“.

Betrachtet man die Verteilung der Primzahlen, so lässt sich kein Prinzip erkennen. Sie sind also unregelmäßig verteilt. Je größer der Wert der Zahl, desto seltener treten Primzahlen auf, die Verteilung wird „dünner“. In diesem Bereich existieren noch zahlreiche ungelöste Probleme, die noch nicht bewiesen sind (z. B.: Vermutung von unendlich vielen Primzahlzwillingen wie 5 und 7 oder 461 und 463).

Satz:

Es gibt unendlich viel Primzahlen.

Beweis: (Euklid) - Widerspruchsbeweis

Annahme: Es gibt nur endlich viele Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$

Bildet man die Zahl $P = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n+1$, so ist der kleinste von 1 verschiedenen Teiler dieser Zahl P eine Primzahl p. Durch die Annahme, dass nur endlich viele Primzahlen existieren, ist p in $p_1, \ldots, p_n$ enthalten, worum $p|\ p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$ gelten muss. Damit und mit der Transitivität der Teilbarkeit gilt auch $p|P$, was ein Widerspruch zur Festlegung von p ist. Daher ist p eine weitere Primzahl und die Annahme, dass es nur endlich viele Primzahlen gibt, ist falsch.

Dieser Beweis liefert nicht nur die Bestätigung, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, sondern auch einen Algorithmus, wie aus n bekannten Primzahlen eine neue generiert werden kann. Dieses Verfahren funktioniert jedoch nur für die Suche von kleinen Primzahlen (z. B. $2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$ oder $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211$).

Im Fall von $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30\,031$ mit $30\,031 = 59 \cdot 509$ funktioniert der Algorithmus „Der kleinste von 1 verschiedene Teiler von $p_1 \cdot \ldots \cdot p_n+1$ ist eine weitere Primzahl“ nicht mehr.

(vgl. Wittmann, 2020, S. 23ff)

5.2.1. Lehrplan

Im sechsten Teil des Lehrplans werden vor allem die Unterrichtsziele und Unterrichtsinhalte im Fach Mathematik der Unterstufe definiert.

„Die Schülerinnen und Schüler sollen durch Erwerb und Nutzung grundlegender Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten Einsichten in die Gebiete Arithmetik, elementare Algebra und Geometrie gewinnen.

Arithmetik: Mit rationalen Zahlen rechnen, Rechenergebnisse abschätzen, elektronische Hilfsmittel benutzen können, Gesetzmäßigkeiten des Rechnens kennen und anwenden können.

Elementare Algebra: Variablen als Mittel zum Beschreiben von Sachverhalten, insbesondere von Gesetzmäßigkeiten und funktionalen

Beziehungen, und zum Lösen von Problemen verwenden können; algebraische Ausdrücke und Formeln bzw. Gleichungen umformen können.“

(Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne – allgemeinbildende höhere Schulen, 2021)

Es wird darin ein sehr großer Wert auf die Vernetzung und den Bezug zur Erlebnis- und Wissenswelt der Schüler*innen gelegt. Außerdem wird das vielfältige Benutzen entsprechender Arbeitstechniken und Lernstrategien für die Planung und Durchführung von Lösungswegen und -schritten bei Aufgabenstellungen vorausgesetzt.
Themen sollten immer eine Phase der Vernetzung zu bereits bekannten Wissensgebieten bieten. Außerdem ist eine Querverbindung zu anderen Unterrichtsgegenständen sowie zur Lebenswelt der Schüler*innen zu schaffen. Diese Ziele werden in der Oberstufe verallgemeinert. Wesentlich ist, dass auf den Unterrichtszielen der Unterstufe aufgebaut wird.

Im Lehrstoff der 1. Klasse findet sich unter *Arbeiten mit Zahlen und Maßen* „*anhand von Teilern und Vielfachen Einblicke in Zusammenhänge zwischen natürlichen Zahlen gewinnen*“ (Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne – allgemeinbildende höhere Schulen, 2021). Dieses Lehrziel wird in der 2. Klasse erweitert durch „*wichtige Teilbarkeitsregeln kennen und anwenden können*“ (Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne – allgemeinbildende höhere Schulen, 2021).
Im Lehrstoff der 5. Klasse im Punkt *Mengen, Zahlen und Rechengesetze* werden Primzahlen als Vertiefung zum Lehrplan (für Stundentafeln mit mehr als 3 Wochenstunden) dezidiert aufgeführt:

„Mit Primzahlen und Teilern arbeiten können; Teilbarkeitsfragen untersuchen können“

(Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne – allgemeinbildende höhere Schulen, 2021)

Es ist somit festzuhalten, dass Primzahlen und die damit verbundenen Regeln für Teilbarkeiten im österreichischen Lehrplan vorgesehen sind. (vgl. Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne – allgemeinbildende höhere Schulen, 2021)

5.2.2. Workshop: Sieb des Eratosthenes

- Thema: Zahlentheorie: „Besondere Zahlen“
- Dauer: 2 Einheiten á 60 Minuten (ca. 120 Minuten)
- Material:
  - Infoblätter und Arbeitsblätter
  - Stifte, Lineal und Bastelmaterial
  - Transparentpapier (mit Aufdruck der Zahlentafel 1-100)

Voraussetzungen:

Die Schüler*innen kennen die vier Grundrechenarten und können mit diesen gut umgehen. Außerdem können sie Vielfache von natürlichen Zahlen bestimmen, also die „Mal-Reihen“ bis 10 gut beherrschen. Für die Bearbeitung ist eine gute Kenntnis des Zahlenraums 1-100 notwendig.

Lehr- und Lernziele

Die Teilnehmer*innen sollen …

- … Teiler von natürlichen Zahlen bestimmen können.
- … „besondere Zahlen“ und ihre Eigenschaften kennen.
- … Primzahlen bis 100 kennen und bestimmen können.

Konzeption

Eine Gruppe von 2-3 Kindern bekommt eine Ziffer zugeordnet. In einer 100er Tafel versuchen sie, alle Vielfachen der Zahl zu finden. Dabei sollen sie eine Regel herausfinden, wie jede beliebige vielfache Zahl aus der Ziffer berechnet werden kann. In der folgenden Phase sollen neue Gruppen so zusammengestellt werden, dass sich von jeder Ziffer ein/eine Teilnehmer*in in der neuen Gruppe befindet (vgl. Gruppenpuzzle bzw. Ich-Du-Wir). Dabei sollen wieder Gemeinsamkeiten und „besondere Zahlen“ der einzelnen Ziffern herausgefunden werden (z.B. 4 und 8 sind Vielfache von 2, oder 6 und 9 sind Vielfache von 3). „Besondere Zahlen“ sollen außerdem auf der Zahlentafel markiert werden. Während dieser Erarbeitungsphasen sind die Kursleiter*innen lediglich als Beobachter und als Hilfestellung bei Fragen zur Problemstellung tätig. Vorwiegend beobachten die Kursleiter*innen die Gruppen beim Erstellen der eigenen 100er-Tafel und geben genügend Freiraum, die Fragestellungen auch mit etwaigen Umwegen durchzugehen. Im Plenum werden alle 100er-Tafeln und

Lösungen präsentiert und besprochen. Gemeinsam werden nun folgende Zahlen besprochen, die nie auf der 100er-Tafel markiert wurden, die Primzahlen. Als Ergebnissicherung kann der Algorithmus zum „Sieb des Eratosthenes“ gemeinsam bearbeitet werden.

Optional können die 100er-Tafeln zum Herausfinden gemeinsamer Vielfache und Teiler herangezogen werden.

Aufbau

Anfangs steht die Frage im Raum, welche Zahlen im Workshop „interessant“ sind, also genauer betrachtet werden. Nach einem gemeinsamen Brainstorming werden Zahlen wie ½, 2.5 oder π ausgeschlossen. Übrig bleiben die Natürlichen Zahlen ℕ, wobei der Zahlenraum 0-100 als ausreichend für den Workshop festgelegt wird.
Außerdem wird der Unterschied zwischen einer Zahl und einer Ziffer (nicht jede Zahl ist eine Ziffer, aber jede Ziffer ist eine Zahl) im Plenum erläutert. Mit kurzen Übungen wird der Unterschied gemeinsam erarbeitet. Außerdem werden im Zuge dieser Übung Vielfache und Teiler einer Zahl definiert.
Um den Inhalt von Teilern und Vielfachen zu veranschaulichen, folgt ein kleines Zahlenrätsel „Drei Stellen“, welches im Anschluss aufgelöst wird. Optional kann bei der Auflösung bereits auf „besondere Zahlen“, den Primzahlen, eingegangen werden.
Als Einführung ins Thema sollte dieser Teil nicht mehr als 20 – 30 Minuten einnehmen.
In der Folge werden die Ziffern den Teilnehmer*innen zugeteilt. In dieser Ich-Phase (siehe Ich-Du-Wir) versuchen die Teilnehmer*innen, alle vielfachen Zahlen der Ziffer herauszufinden und auf einer 100er-Tafel zu markieren. An dieser Stelle wird schnell klar, dass 0 und 1 jene Ziffern sind, die alle Zahlen teilen, bzw. ein Vielfaches mit jeder Zahl bilden können. Den Teilnehmer*innen mit diesen Ziffern kann die zusätzliche Aufgabe der Suche aller Vielfachen von 10, 20, 30,… im Zahlenraum 1-100 gegeben werden.
Ist diese Phase abgeschlossen, beginnt die Du-Phase (siehe Ich-Du-Wir). Es werden die Gruppen nach den Ziffern 2 und 5, 4 und 8, 6 und 9, 3 und 7 und 0 und 1 eingeteilt. Hier soll herausgefunden werden, was diese Ziffern gemeinsam haben und welche Teilbarkeitsregeln zu den Ziffern bekannt sind. Für diese Erarbeitung muss genügend Zeit eingeplant werden, da in der anschließenden Wir-Phase eine Präsentation der Ergebnisse je Gruppe stattfindet. Es soll also auch die Erarbeitung der Präsentation in

der Du-Phase berücksichtigt werden. Das Augenmerk liegt jedoch auf den zu bearbeitenden 100er-Tafeln.
Für die Präsentation im Plenum werden pro Gruppe mindestens 5-10 Minuten benötigt, wobei jedes Ziffern-Paar in dieser Zeit möglichst alle Fragestellungen der Du-Phase beantwortet. Falls Fragen offen bleiben, werden diese im Plenum erarbeitet.
Als Abschluss der Bearbeitung der 100er-Tafel gibt es wieder einige Zahlenrätsel. Diese können selbständig gelöst werden, bzw. für sehr schnelle Gruppen in der Du-Phase zur Überbrückung der Zeit herangezogen werden. Jedes dieser Rätsel sollte besprochen und aufgelöst werden.
Zu guter Letzt stellt sich noch die Frage, warum manche Zahlen auf der 100er-Tafel nie als Vielfache einer anderen Zahl vorkommen. Diese Zahlen werden ab sofort „Primzahlen" genannt. Im Folgenden wird gemeinsam anhand einer 100er-Tafel der Algorithmus zum Das Sieb des Eratosthenes und dem Finden der Primzahlen ausgeführt. Dieses „Aussieben der Zahlen" stellt den Abschluss des Workshops dar. Als Anwendung von Primzahlen kann eine Verknüpfung zu verschlüsselten Textnachrichten (RSA-Verschlüsselung) hergestellt werden und im Zuge dessen ein Konnex zur Informatik gebildet werden.
Ist die Gruppe etwas größer, kann statt der Ich-Du-Wir-Methode das Gruppenpuzzle als Sozialform gewählt werden. Der Ablauf verändert sich dadurch nicht, lediglich die Gruppenbildung wird an die Gruppengröße angepasst.

5.2.3. Dokumentation

Den Teilnehmer*innen fällt es zu Beginn sehr leicht, Zahlen zu nennen, die „interessant" sind. Beispielsweise werden Zahlenpalindrome wie 636 genannt. Darunter versteht man eine Zahl, die von vorne und hinten gleich zu lesen ist. Oder aber es werden Zahlen genannt, deren Ziffern ident sind (11, 22, 33, …). 69 wird bei den Kindern ebenfalls als „interessant" gesehen, da sie sowohl von oben als auch von unten gleich gelesen werden kann. Vereinzelt wird auch π als interessante Zahl genannt, was seine Berechtigung hat, da sie unendlich lange ist (irrationale Zahl), aber in diesem Workshop nicht verwendet wird. Zahlen wie ½, 4.5 oder andere Brüche und Dezimalzahlen werden von den Kindern sehr oft genannt. Auch diese Zahlen sind „interessant", jedoch werden sie für den Workshop zum Sieb des Eratosthenes nicht benötigt. Nach dem Brainstorming mit den Kindern ist genau festzuhalten, dass für den

Workshop nur die natürlichen Zahlen ℕ benötigt werden. Die 0 wird dabei in die natürlichen Zahlen miteinbezogen. Die Unterscheidung von Zahlen und Ziffern können die Teilnehmer*innen meist selbst vornehmen.
Anhand der gemeinsamen Beispiele wir nun offensichtlich, was Vielfache sind.

Abbildung 18: Beispiel zu Vielfache aus Arbeitsblatt

Aus den bereits bekannten Einer- und Zehnerstellen werden Vielfache gebildet und diese addiert, um die gewünschte zweistellige Zahl zu bekommen. Dazu werden noch weitere Beispiele gelöst (siehe Arbeitsblatt).
Um den Workshop etwas aufzulockern, wird das Zahlenrätsel „Drei Stellen“ mit den Teilnehmer*innen durchgeführt. Dabei ist darauf achtzugeben, dass die Division mit mehrstelligen Divisoren meist noch nicht gelernt wurde. Mit Hilfe der Leiter*innen kann dieses Hürde leicht genommen werden, da die Teilnehmer*innen den Algorithmus zum Dividieren mit einstelligen Zahlen meist sehr gut können, und eine Erweiterung dieses Algorithmus dadurch leichter fällt. Dadurch ist für diese Phase des schriftlichen Dividierens genügend Zeit einzuplanen. Ist die Division durch 7, 11 und 13 abgeschlossen, können Teiler einer Zahl gemeinsam besprochen werden. Im Weiteren können Vielfache als „Gegenspieler“ der Teiler aufgefasst werden. Es stellt sich sehr schnell heraus, dass $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$ ergibt. Mit diesem Wissen und den Übungen zuvor ist es für die Teilnehmer*innen nun leicht nachzuvollziehen, wie der Trick funktioniert.
In der folgenden Phase des Workshops werden die Vielfachen von 1, 2, 3, …, 9 durch die Teilnehmer*innen erarbeitet. Dabei stellten sie folgende Beobachtungen fest:

- Ziffer 0: 0 ist ein Vielfaches jeder Zahl! (siehe Ziffer 1)
- Ziffer 1: Jede Zahl ist ein Vielfaches von 1!
  „Ich muss die gesamte 100er-Tafel anmalen.“
  Dieser/diese Teilnehmer*in bekam in der Folge die Aufgabe, die Vielfachen von 10, 20, … zu finden. Dabei wurde von den Teilnehmer*innen angemerkt, dass es sich nur um die letzte Spalte auf der 100er-Tafel handelt.
- Ziffer 2: Jedes zweite Kästchen ist auszufüllen. Es handelt sich um die geraden Zahlen.
  „Ich kann immer alle darunterliegenden mit anmalen und bekomme dadurch Säulen.“

- Ziffer 3: Jedes dritte Kästchen ist auszufüllen.
  Bildet man die Ziffernsumme, muss diese durch 3 teilbar sein.
  „Es ergibt sich ein Muster, das schräg verläuft.“
- Ziffer 4: Jedes vierte Kästchen ist auszufüllen.
  4 ist ein Vielfaches von 2. Nur jede gerade Zahl, deren Hälfte wiederum eine gerade Zahl ist, ist durch 4 teilbar.
  „Es ergibt sich eine Art von Schachbrett.“
- Ziffer 5: Jedes fünfte Kästchen ist auszufüllen.
  Ist die Einerstelle entweder 0 oder 5, ist die Zahl durch 5 teilbar.
  „Ich habe nur 2 Spalten in meiner 100er-Tafel.“
- Ziffer 6: Jedes sechste Kästchen ist auszufüllen.
  Jede gerade Zahl, die durch 3 teilbar ist, ist auch durch 6 teilbar.
- Ziffer 7: Jedes siebte Kästchen ist auszufüllen.
- Ziffer 8: Jedes achte Kästchen ist auszufüllen.
  „Ich bekomm zweimal das gleiche Muster in der Tafel!“
- Ziffer 9: Jedes neunte Kästchen ist auszufüllen.
  Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn deren Ziffernsumme durch 9 teilbar ist.
  „Es entsteht eine Diagonale in der 100er-Tafel.“

In den meisten Fällen wurden die Teilbarkeitsregeln in der Du-Phase herausgefunden. War dies nicht der Fall, wurden die Regeln in der Wir-Phase gemeinsam besprochen. Außerdem wurden die bearbeiteten Tafeln übereinandergelegt, wodurch Zahlen offensichtlich wurden, die in beiden Tafeln vorkamen. Es handelt sich dabei um gemeinsame Vielfache. Nachfolgend die 100er-Tafeln für die Vielfachen von

- 3 und 7
- 4 und 8
- 2 und 5
- 6 und 9

Abbildung 19: Vielfache von 3 und 7

Abbildung 20: Vielfache von 4 und 8

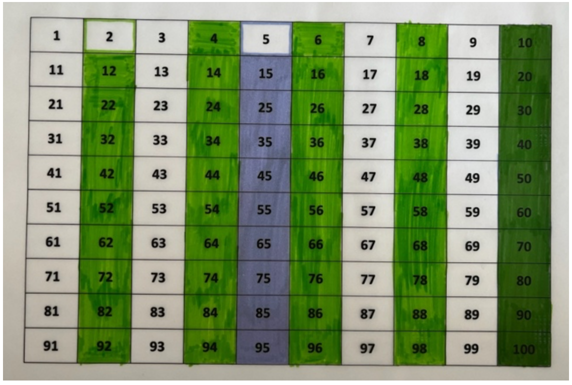


Abbildung 21: Vielfache von 2 und 5

Abbildung 22: Vielfache von 6 und 9

Nach der Präsentation im Plenum zeigten sich die Teilnehmer*innen sehr kreativ in der Lösungsfindung der Zahlenrätsel. Nachdem weder der größte gemeinsame Teiler noch das kleinste gemeinsame Vielfache aus der Schule bekannt waren und auch im Workshop nicht eingeführt wurden, verwendeten die meisten Kinder die Tafeln, um alle Möglichkeiten zu finden. In den meisten Fällen gab es mehrere Lösungsvorschläge der Teilnehmer*innen, wie die gesuchte Zahl gefunden werden konnte.

Ich bin eine zweistellige Zahl.
Die Summe meiner Ziffern ist 11.
Ich bin ein Vielfaches von 4 und von 7.
Welche Zahl bin ich?

Abbildung 23: Zahlenrätsel

Es bleibt den Kindern dabei offen, ob zuerst alle Zahlen mit der Ziffernsumme 11, die Vielfachen von 7 oder die Vielfachen von 4 gesucht werden. Es bietet sich an, die 100er-Tafeln für 7 und 4 übereinander zu legen und so die gemeinsamen Vielfachen

zu finden. Diese müssen dann nur noch mit der Ziffernsumme verglichen werden, woraus sich die gesuchte Zahl 56 ergibt.
Ähnlich sind auch die weiteren Zahlenrätsel des Arbeitsblattes aufgebaut.
Falls bei der Wir-Phase noch nicht die Frage auftritt, was mit den Zahlen ist, die keine Färbung, also keine Vielfachen einer Zahl sind, sollte sie nun abschließend im Plenum besprochen werden. Dazu können die 100er-Tafeln der Ziffern 2, 3, 5 und 7 übereinandergelegt werden.

Abbildung 24: Finden der Primzahlen durch Übereinanderlegen der 100er-Tafeln

Durch dieses übereinanderlegen kann direkt der Algorithmus zum Sieb des Eratosthenes erklärt werden. Außerdem kann im Zuge dessen auch die Verwendung der Primzahlen in der Informatik zur Verschlüsselung von Nachrichten erläutert werden. Für die Teilnehmer*innen ist durch das schrittweise Übereinanderlegen der Tafeln ersichtlich, welche Zahlen im Sieb übrigbleiben. Diese „ausgesiebten Zahlen“ werden ab sofort Primzahlen genannt.

Als Erweiterung zum Workshop kann nun der größte gemeinsame Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache mit der Primfaktorenzerlegung eingeführt werden. Im Mini Talente Club war dies aus zeittechnischen Gründen nicht mehr möglich.

6. Befragung der Teilnehmer*innen

6.1. Ziel der Befragung und Datenerhebung

Ziel der Befragung

Mittels der Befragung der Teilnehmer*innen zu Beginn des Clubs, nach den Mathematik-Workshops und am Ende des Clubs soll der Mini Talente Club evaluiert werden.

Ziel der Befragung ist es, folgende Fragen beantworten zu können:

- Inwieweit sind die Inhalte des Mini Talente Clubs an das Wissen der Teilnehmer*innen angepasst?
- Wie beurteilen die Teilnehmer*innen die Mathematik-Workshops?
- Wie verändert sich die Einstellung zur Gruppenarbeit über den Kurs hinweg?
- Wurden die Erwartungen der Teilnehmer*innen am Ende des Clubs erfüllt?

Datenerhebung

Um die oben genannten Fragen zu beantworten, wurde der Methodenmix („Mixed Methods") als Untersuchungsdesign gewählt. Es handelt sich dabei um eine qualitative als auch quantitative Forschungsmethode. Mittels der offenen Fragen (qualitative Forschungsmethode) können die Teilnehmer*innen ihre Meinung gut äußern, was eine Beantwortung der oben genannten zweiten Frage ermöglicht. Mit dem quantitativen Teil werden die Fragestellungen standardisiert und eine bessere Vergleichbarkeit der Antworten ist somit gegeben. (vgl. Baur & Blasius, 2014, S. 153ff)

Die Fragebögen wurden im Club als Arbeitsblatt an alle 12 Teilnehmer*innen ausgeteilt, nach der Bearbeitung wieder eingesammelt und zur Auswertung digitalisiert.

Entwicklung des Fragebogens

Im Anhang finden sich die Fragebögen in Form von Arbeitsblättern. Insgesamt wurden 3 Fragebögen erstellt. Im ersten Fragebogen werden allgemeine Daten zum/zur Teilnehmer*in abgefragt. Dabei sind Alter, Geschlecht, Schulstufe und Schultyp anzugeben. Folglich müssen die Teilnehmer*innen die Erwartungen an den Club, die Betreuer*innen und die Inhalte noch mittels offener Fragen angeben.

Im zweiten Fragebogen, der nach den Mathematik-Workshops im Club ausgeteilt wird, werden zuallererst die spontanen Erinnerungen der Teilnehmer*innen abgefragt. Sie sollen hier notieren, was ihnen als erstes einfällt. Es folgen Fragen zur Schwierigkeit der Aufgabenstellungen und der Arbeitsweise während der Mathematik-Workshops. Am Ende des Fragebogens befinden sich noch offene Fragen, was den Teilnehmer*innen gefallen bzw. nicht gefallen hat und welche Verbesserungsvorschläge sie haben.

Der letzte Fragebogen, der bei der Abschlussveranstaltung ausgeteilt wird, erfasst die Eindrücke der Teilnehmer*innen quantitativ.

6.2. Datenauswertung

Es nahmen alle Teilnehmer*innen des Mini Talente Clubs an der Befragung teil. Die erhobenen Daten wurden nach der Digitalisierung mittels der beschreibenden Statistik ausgewertet. Die folgenden Diagramme wurden mit Excel erstellt.

6.2.1. Fragebogen zu Beginn des Clubs

Frage 1: Bist du ein: Mädchen / Junge

Im Club haben 2 Mädchen (17%) und 10 Jungen (83%) teilgenommen. Bei den Teilnahmebestätigungen wird ein möglichst ausgewogenes Verhältnis von Mädchen und Jungen angestrebt. Die Verteilung ist jedoch abhängig von den Anmeldungen der Kinder.

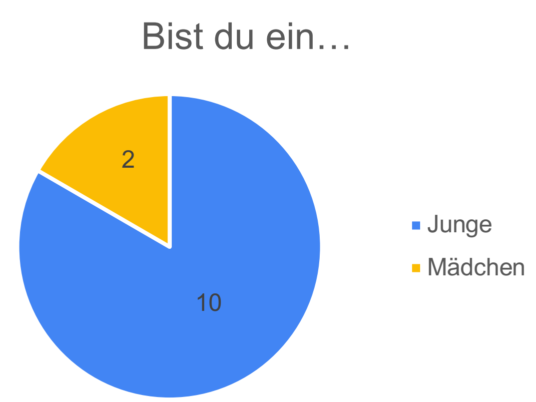


Abbildung 25: Auswertung Geschlecht [n=12]

Frage 2: Hast du Geschwister? Wenn ja, wie viele?

Laut Angaben im Fragebogen sind 4 Teilnehmer*innen (33%) Einzelkinder, 4 Teilnehmer*innen (33%) haben einen Bruder oder eine Schwester, 3 Teilnehmer*innen (25%) haben zwei Geschwister und ein*e Teilnehmer*in (9%) hat drei Geschwister.

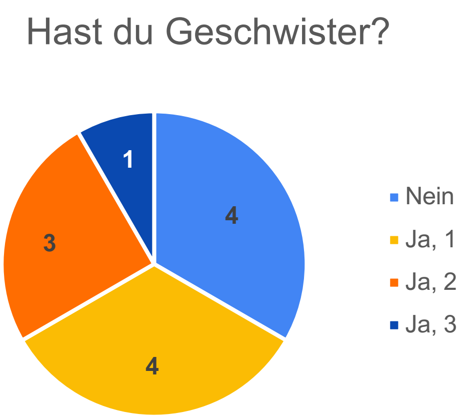


Abbildung 26: Auswertung Geschwister [n=12]

Frage 3: In welche Schulstufe gehst du?

Folgendes Kreisdiagramm in Abbildung 27 zeigt die Verteilung der Teilnehmer*innen auf die Schulstufen. Den größten Anteil mit 67% machen Teilnehmer*innen der 4. Schulstufe aus, gefolgt von 25% der Teilnehmer*innen in der 3. Schulstufe. Lediglich ein/eine Teilnehmer*in besucht bereits die 5. Schulstufe.

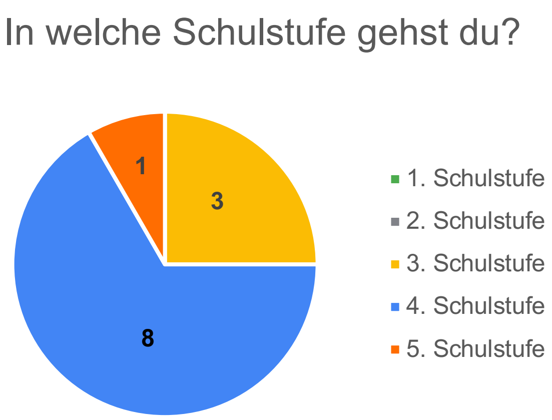


Abbildung 27: Auswertung Schulstufe [n=12]

Frage 4: Welchen Schultyp besuchst du?

Wie bereits die vorangegangene Frage vermuten lässt, besuchen 92% der Teilnehmer*innen die Volksschule, während ein/eine Teilnehmer*in bereits das Gymnasium besucht. Keine Teilnehmer*innen besuchen die Mittelschule oder andere Schultypen (Montessori-, Waldorf-, Freie Schulen…).

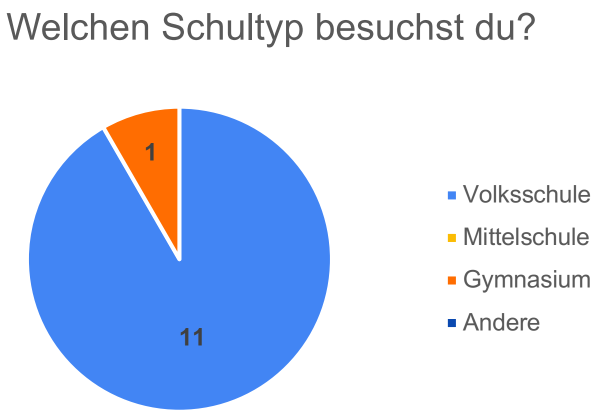


Abbildung 28: Auswertung Schultyp [n=12]

Frage 5: Warum hast du dir genau diese Veranstaltung aus den Angeboten von Talente OÖ ausgesucht?

Da diese Frage im offenen Format gestellt wurde, könne die Antworten hier schwer kategorisiert werden.

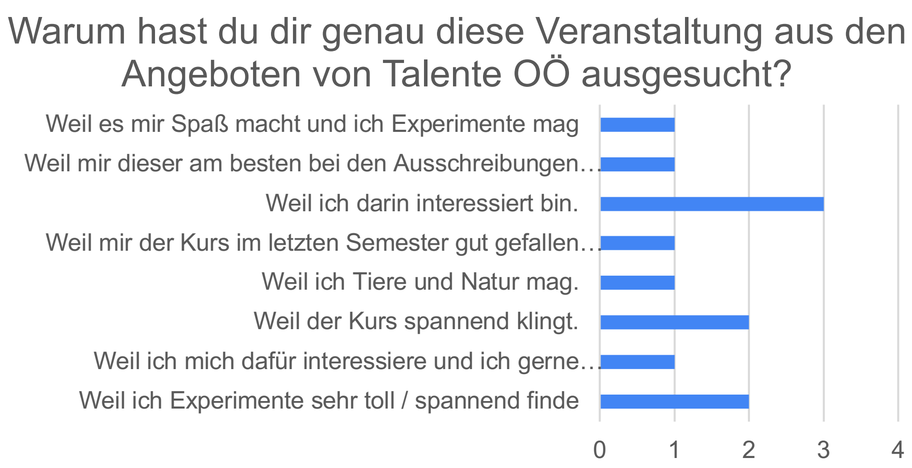


Abbildung 29: Auswertung Wahl der Veranstaltung [n=12]

Folglich wurde die Auswahl des Clubs aus den Angeboten von Talente Oberösterreich nach den Interessen der Kinder getroffen.

Frage 6: Was erwartest du vom Mini Talente Club?

Auch diese Frage wurde im offenen Format gestellt, um ein möglichst breites Spektrum an Antworten zu erzielen.

- Dass er mich fördert.
- Dass er Spaß macht und ich neue Dinge lerne.
- Dass er Spaß macht. (3x)
- Dass wir uns Tiere und Pflanzen anschauen.
- Dass wir viel Neues lernen.
- Dass wir über Pflanzen lernen.
- Dass wir viel Neues lernen und Spaß haben.
- Dass ich mich leichter für einen Zweig im Gymnasium entscheiden kann.
- Dass ich neue Herausforderungen habe.
- Dass ich vielleicht neue Freunde finde.

Frage 7: Was erwartest du von den Betreuer*innen?

Diese Frage wurde ebenfalls im offenen Format gestellt, um ein möglichst breites Spektrum an Antworten zu erzielen.

- Dass sie freundlich sind.
- Dass sie nett sind.
- Dass sie nett und nicht streng sind.
- Dass sie nett sind und mit uns viele Sachen machen.
- Dass sie tolle Sachen mit uns machen.
- Dass sie mir helfen, wenn ich beim Lösen von Aufgaben Hilfe brauche.
- Dass sie Freude und Spaß haben.
- Dass sie viel erklären und wir viel lernen.
- Dass sie ausführlich erklären und nett sind.
- Dass wir neben dem Lernen auch einmal Spiele spielen.
- Dass sie geduldig sind.
- Dass sie meine Fragen beantworten.

Frage 8: Was bedeutet MINT?

Wie dem Diagramm (Abbildung 30) zu entnehmen ist, verknüpfen MINT drei Teilnehmer*innen mit Mathematik und Naturwissenschaften, zwei davon konnten eine genaue Definition angeben. Einem Viertel der Teilnehmer*innen kam der Begriff bekannt vor, konnte jedoch nicht genau definieren, was damit gemeint ist. Jeweils ein/eine Teilnehmer*in gaben an, dass es sich dabei um die wichtigsten Fächer handle, dass es sich um die Farbe Mint handle bzw. dass Minute gemeint sei (falsch geschrieben bzw. abgekürzt).

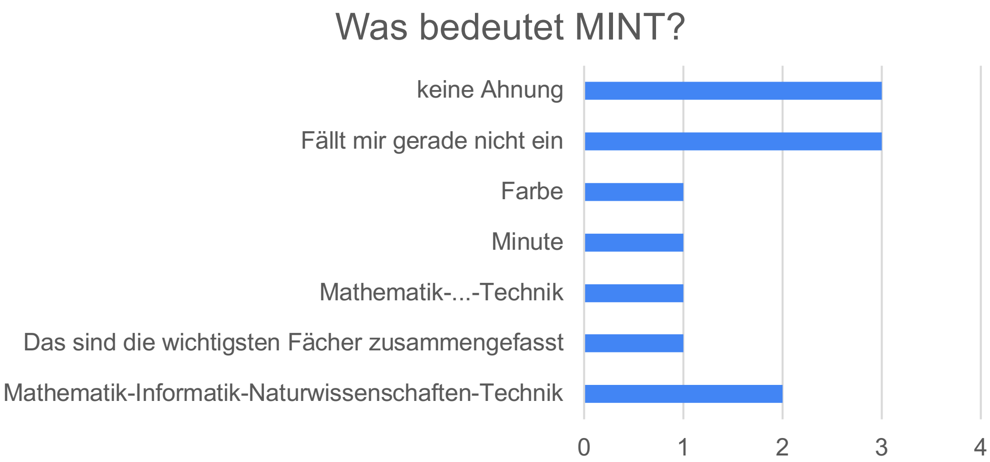


Abbildung 30: Auswertung MINT [n=12]

Frage 9: Wie sehr gefällt es dir, wenn du mit anderen Kindern in einer Gruppe zusammenarbeitest?

3 von 12 Teilnehmer*innen gaben an, sehr gerne in der Gruppe zu arbeiten. Ein Viertel gab an, gerne in der Gruppe zu arbeiten und zwei Personen gaben an, dass es ihnen nichts ausmacht, in einer Gruppe zu arbeiten. Ein Drittel der Teilnehmer*innen arbeiten lieber alleine.

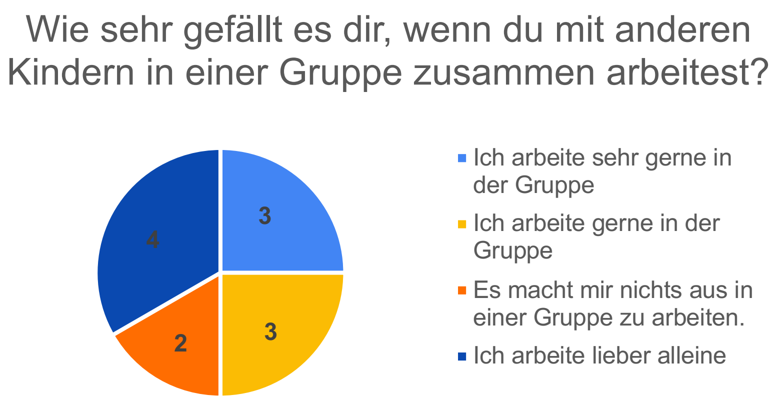


Abbildung 31: Auswertung Gruppenarbeit [n=12]

6.2.2. Fragebogen nach den Mathematik-Workshops

Frage 10: Was fällt dir spontan zum Block Mathematik ein?

Bei dieser Frage war eine kurze Antwort der Teilnehmer*innen gefordert, was ihnen am meisten hängen blieb. Nachfolgend die sehr unterschiedlichen Schlagworte:

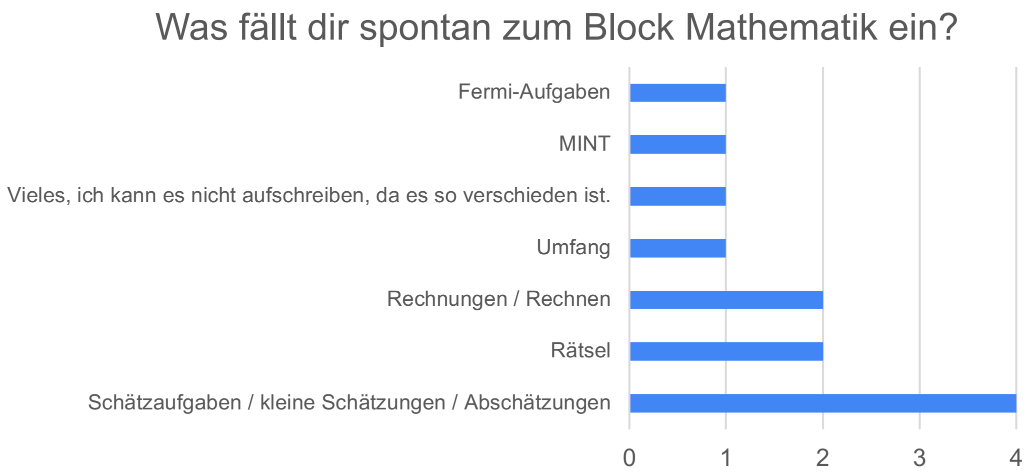


Abbildung 32: Auswertung Schlagworte [n=12]

Frage 11: Wie hat dir das Angebot der Mathematik-Workshops gefallen?

Von allen 12 Teilnehmer*innen des Clubs empfanden 7, dass ihnen die Angebote sehr gut gefallen haben. Ein Drittel der Teilnehmer*innen empfanden das Angebot gut. Nur ein*e Teilnehmer*in empfand das Angebot nicht so gut.

Abbildung 33: Auswertung Angebote Mathematik-Workshops [n=12]

Frage 12: Welche Fermi-Aufgabe hat du gelöst?

Von allen 12 Teilnehmer*innen des Clubs waren 5 in der Gruppe der Zahnpasta-Fragestellung, 4 Teilnehmer*innen befassten sich mit dem Riesenfuß und seiner Lackierung mit Nagellack. Drei Teilnehmer*innen haben die Toilettenpapier-Aufgabe gelöst.

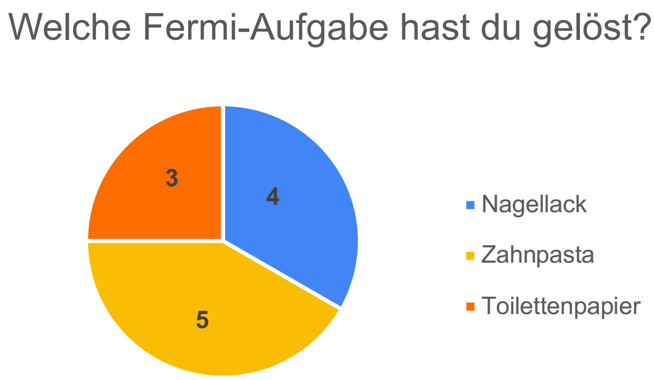


Abbildung 34: Auswertung Verteilung der Aufgaben [n=12]

Frage 13: Was ist besonders an Fermi-Aufgaben?

Da diese Frage im offenen Format gestellt wurde, werden die Antworten nachfolgend aufgelistet:

- Dass sie nicht so leicht zu lösen sind. (2x)
- Dass sie schwer zu berechnen sind. (2x)
- Dass man eher schätzen, statt rechnen muss.
- Es gibt keine „richtige Lösung“. Man muss Annahmen treffen.
- Dass sie nicht einfach so wie andere Aufgaben sind.
- Dass man nur schätzen kann. (2x)
- Dass das Zahnpasten-Experiment auch ausprobiert werden konnte.
- Dass es immer stimmt und nur von den Überlegungen abhängt.
- Dass es Aufgaben sind, bei denen man viel denken muss.

Es ist auffällig, dass alle Kinder vor allem das Schätzen im Vordergrund sahen. All diese Aussagen decken sich damit, was Fermi-Aufgaben auszeichnen.

Frage 14: Fiel es dir leicht, die Aufgabenstellungen zu erfassen?

Von allen 12 Teilnehmer*innen des Mini Talente Clubs fiel es 8 leicht, die Aufgabestellungen zu erfassen. Zwei Teilnehmer*innen fiel es nicht so leicht, die Aufgabestellungen zu erfassen, während zwei Teilnehmer*innen die Erfassung sehr leichtfiel.

Abbildung 35: Auswertung Aufgabenstellungen erfassen [n=12]

Frage 15: Fiel es dir leicht, einen Lösungsweg für die Aufgabenstellungen zu finden?

Die Antworten fielen genau gleich wie in der vorherigen Frage aus. 8 Teilnehmer*innen fiel es leicht, einen Lösungsweg zu finden. Zwei Teilnehmer*innen fiel es nicht so leicht, während zwei Teilnehmer*innen das Finden der Lösungswege sehr leichtfiel. Von den Teilnehmer*innen, die leicht bzw. sehr leicht angaben, wurden noch weitere Informationen in der Folgefrage eingeholt.

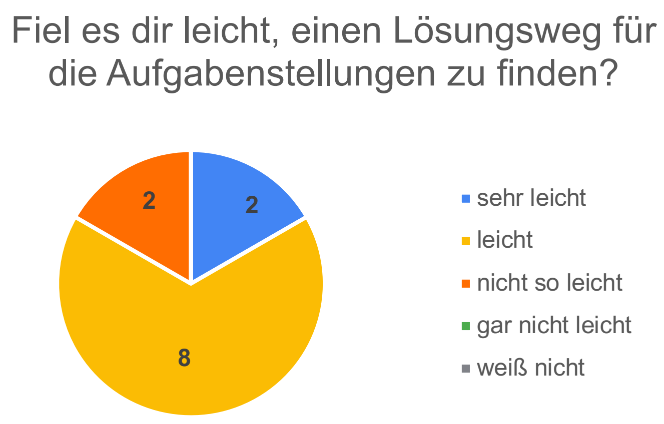


Abbildung 36: Auswertung Lösung der Aufgabenstellungen [n=12]

Frage 16: Half dir dabei die Gruppenarbeit?

Von 10 Teilnehmer*innen gaben 3 an, dass die Gruppenarbeit beim Finden der Lösungswege half. Einem/einer half die Gruppenarbeit nicht bei der Lösungsfindung und für 6 war die Sozialform der Gruppenarbeit beim Finden von Lösungswege nicht relevant.

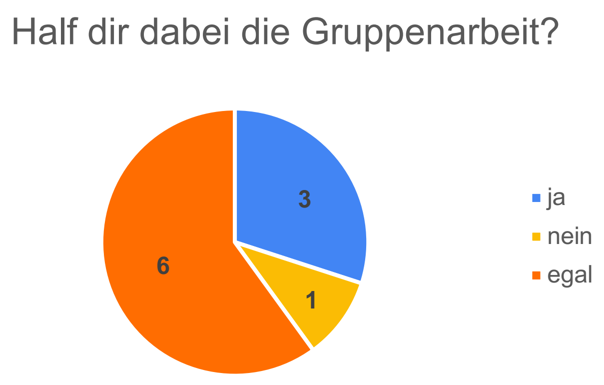


Abbildung 37: Auswertung Gruppe [n=12]

Frage 17: Wie sehr gefällt es dir, wenn du mit anderen Kindern in einer Gruppe zusammenarbeitest?

5 von 12 Teilnehmer*innen gaben an, lieber allein zu arbeiten. Je ein Viertel gab an, sehr gerne bzw. gerne in der Gruppe zu arbeiten. Eine Person gab an, dass es ihr nichts ausmacht, in einer Gruppe zu arbeiten.

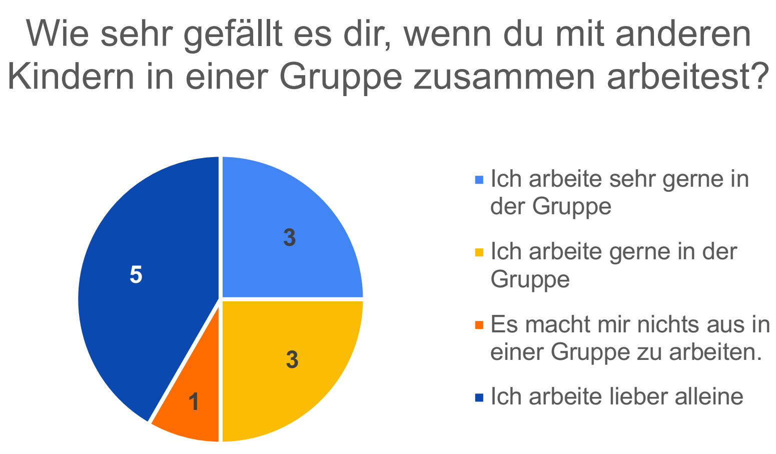


Abbildung 38: Auswertung Gruppenarbeit [n=12]

Frage 18: Wie sehr hat dir das kreative Gestalten eines Plakates zur Veranschaulichung des Lösungsweges gefallen?

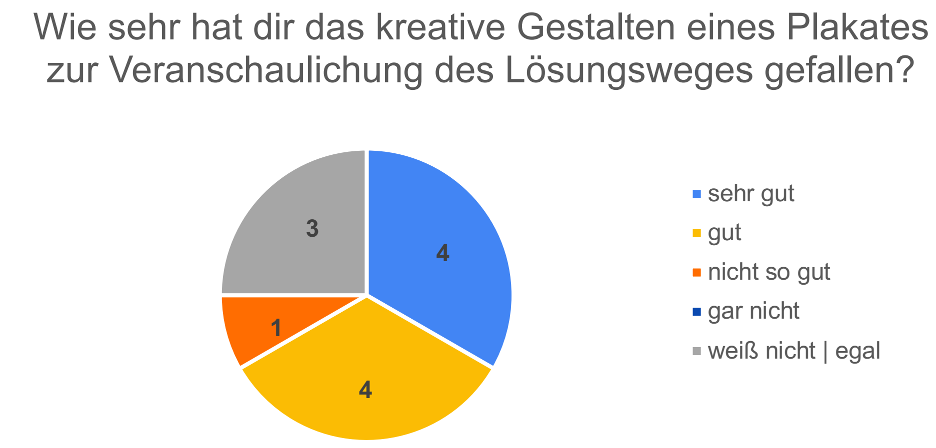


Abbildung 39: Auswertung kreatives Gestalten [n=12]

Frage 19: Kreise den Smiley an, der aussagt, wie deine Erwartungen an die Mathematik-Workshops erfüllt worden sind!

Dabei standen folgende sechs Smileys zur Auswahl:

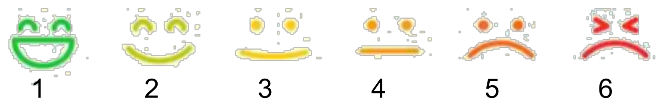


Abbildung 40: Auswertung Erfüllung Erwartungen Mathematik-Workshop [n=12]

Frage 20: Was gefiel dir an den Mathematik-Workshops?

Da diese Frage im offenen Format gestellt wurde, werden die 10 angegebenen Antworten nachfolgend aufgelistet. Zwei Teilnehmer*innen gaben keine Antwort an.

- Schätzen und auch andere Aufgaben
- Besonders gut gefielen mir die Zahlenfolgen-Aufgaben, wo man anders denken musste!
- Alles gefiel mir sehr gut!
- Dass man knobeln musste.
- Dass sie sehr interessant waren.
- Dass wir zusammenarbeiten konnten.
- Die Knobelaufgaben
- Die Rätselaufgaben
- Die sonderbar schwierigen Aufgaben.
- Es war sehr interessant und faszinierend, was man mit Mathematik alles herausfinden kann.

Frage 21: Was gefiel dir nicht an den Mathematik-Workshops?

Da diese Frage im offenen Format gestellt wurde, werden die 7 angegebenen Antworten nachfolgend aufgelistet. Fünf Teilnehmer*innen gaben keine Antwort an.

- Die lange Nachdenkerei, um zu einer Lösung zu kommen.
- Die Gruppenarbeit – Ich arbeite lieber allein!
- Dass ein Kind aus meiner Gruppe nicht motiviert war und mich ständig ablenkte.
- Manche Aufgaben waren sehr schwer!
- Das Gestalten der Plakate!
- Alles!
- Die vielen Rechenschritte, um zu einer Lösung zu gelangen.

Frage 22: Hast du Verbesserungsvorschläge für das nächste Mal?

Diese Antwort wurde von allen Teilnehmer*innen mit NEIN beantwortet.

6.2.1. Fragebogen nach dem Mini Talente Club

Frage 23: Denke spontan an den Mini Talente Club! Was fällt dir als Erstes dazu ein?

Um ein breites Spektrum an Eindrücken zu erhalten, wurde diese Frage im offenen Format gestellt. Folgende Antworten wurden gegeben:

- Mit viel Spaß die Welt entdecken
- Die acht Unbekannten bei dem Chemie-Versuch herausfinden.
- Sachen über den Licht-Kasten beim Physik-Workshop. (2x)
- Chemie-Workshop (2x)
- Experimente im Labor
- Verein Talente OÖ
- Knobelaufgaben
- Schnitzeljagd (Campus-Führung)
- alle Mathe-Aufgaben
- Science-Park (JKU)
- Rutschenchallenge bei der Schnitzeljagd

Frage 24: Kreise den zutreffenden Smiley ein! Wie hat dir das Angebot im gesamten Mini Talente Club gefallen?

Dabei standen folgende sechs Smileys zur Auswahl:

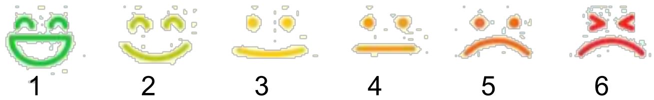


Abbildung 41: Auswertung Angebote im Mini Talente Club [n=12]

Frage 25: Welches Thema hat dir am besten gefallen?

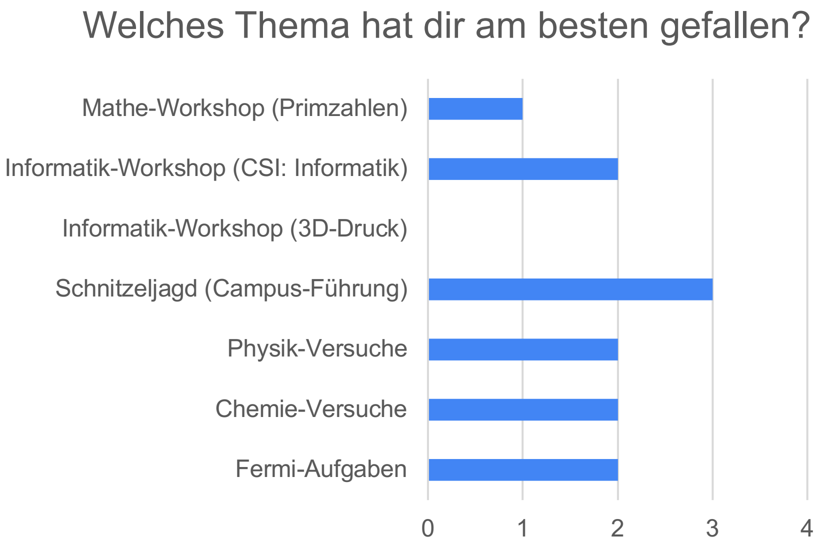


Abbildung 42: Auswertung Themenbereiche [n=12]

Frage 26: Wie sehr gefällt es dir, wenn du mit anderen Kindern in einer Gruppe zusammenarbeitest?

3 von 12 Teilnehmer*innen gaben an, sehr gerne in einer Gruppe zu arbeiten. Ein Drittel gab an, gerne in der Gruppe zu arbeiten. Eine Person gab an, dass es ihr nichts ausmacht, in einer Gruppe zu arbeiten und vier Teilnehmer*innen arbeiten lieber alleine.

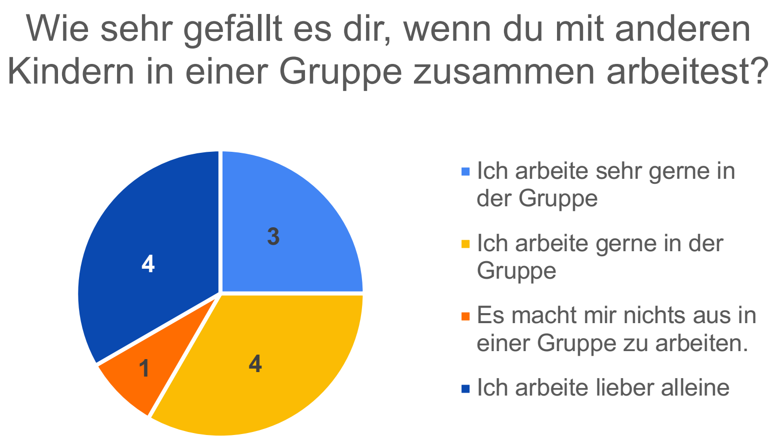
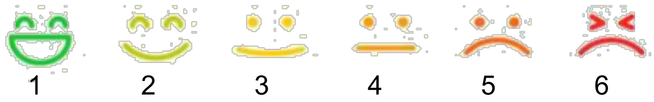


Abbildung 43: Auswertung Gruppenarbeit [n=12]

Frage 27: Kreise den Smiley ein, der aussagt, wie deine Erwartungen an den Mini Talente Club erfüllt worden sind?

Dabei standen folgende sechs Smileys zur Auswahl:



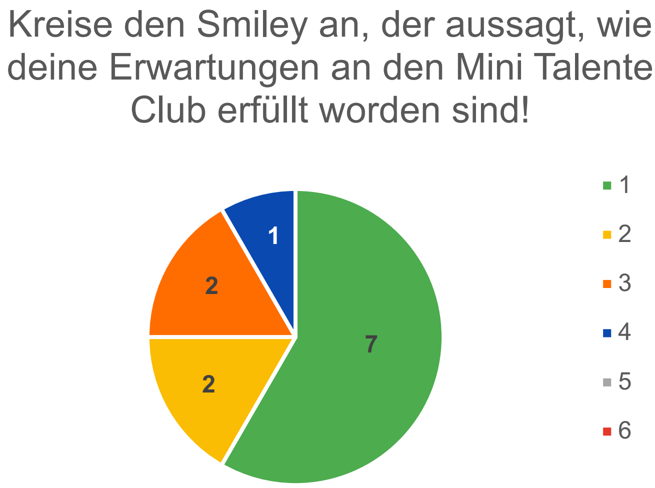


Abbildung 44: Auswertung Erfüllung Erwartungen Club [n=12]

Frage 28: Kreise den zutreffenden Smiley ein! Waren die Aufgabenstellungen für dich immer klar und machbar?

Dabei standen folgende sechs Smileys zur Auswahl:

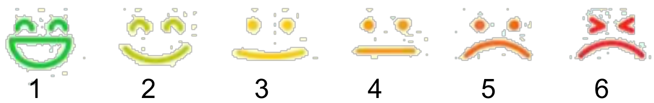


Abbildung 45: Auswertung Aufgabenstellungen [n=12]

6.3. Analyse und Diskussion der Ergebnisse

Die erhobenen Daten wurden im weiteren Verlauf auf eventuelle Auffälligkeiten und Zusammenhänge untersucht.

6.3.1. Geschlechterverteilung

Aus dem Diagramm (Abbildung 25) geht hervor, dass nur 2 Mädchen am Club teilgenommen haben. Grundsätzlich ist ein ausgewogener Mädchen-Jungen-Anteil erstrebenswert. Die Teilnehmer*innen hängen stark von der Anmeldung zum Club über die Anmeldeplattform von Talente Oberösterreich ab. Um die Mädchenförderung noch zu verstärken, ist es überlegenswert, einen Club speziell für Mädchen anzubieten.

6.3.2. Schulstufe und Schultyp

Lediglich ein/eine Teilnehmerin besucht bereits die Sekundarstufe I in Form eines Gymnasiums. Alle anderen Teilnehmer*innen besuchen die Volksschule, wobei der Großteil die 4. Schulstufe besucht. (siehe Abbildung 27 und Abbildung 28)

6.3.3. Inhalte

Um die Frage, inwieweit die Inhalte an das Wissen der Teilnehmer*innen im Club angepasst waren, zu beantworten, wurden die Fragen 14 und 15 miteinander verglichen.

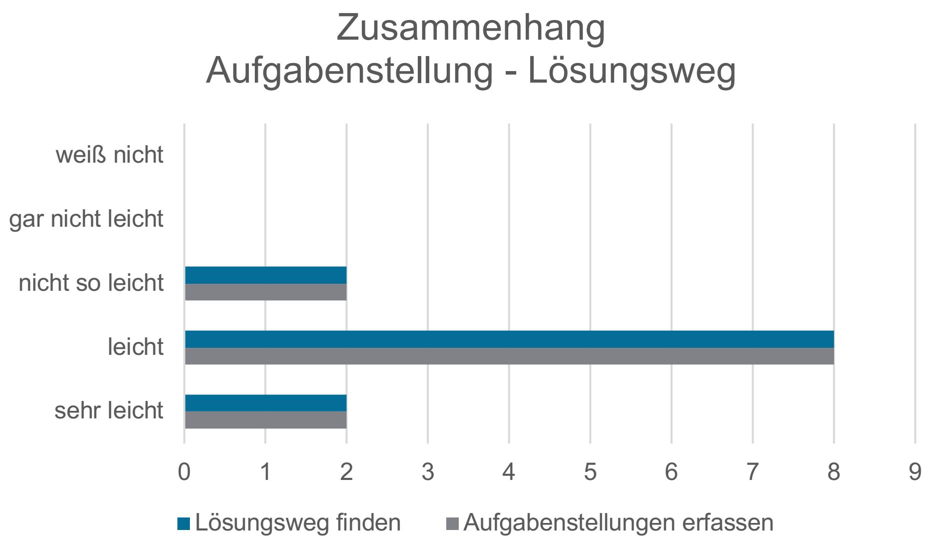


Abbildung 46: Zusammenhang Aufgabenstellung – Lösungsweg [n=12]

Auffällig ist dabei, dass die Antworten komplett ident sind. Mehr als 83% fanden sowohl die Aufgabenstellungen als auch das Finden eines Lösungsweges leicht bzw. sehr leicht. Die Aufgaben könnten daher noch komplexer gestaltet werden.
Wie aus der Frage 24 (Wie hat dir das Angebot im gesamten Mini Talente Club gefallen? - Abbildung 41) hervorgeht, fanden zwei Drittel der Teilnehmer*innen (großen) Gefallen am Club. Lediglich ein Kind gab an, dass ihm der Club nicht so gut gefallen hat. Diese Person beantwortete die Frage, was ihr an den Mathematik-Workshops nicht gefallen hat mit „ALLES!“ (siehe Frage 21: Was gefiel dir nicht an den Mathematik-Workshops?).

6.3.4. Mathematikworkshop

Bei Frage 10 (Abbildung 32) waren die Kinder angehalten, spontane Erinnerungen an die Mathematik-Workshops aufzuschreiben.
Aus den gegebenen Schlagworten geht hervor, dass die meisten Kinder Schätzaufgaben, Rätsel und Rechnungen mit den Workshops verbinden. Dies deckt sich auch mit den Inhalten der Mathematik-Workshops.

Aus Frage 11 geht hervor, dass 11 von 12 Kindern die Mathematik-Workshops gut bzw. sogar sehr gut gefallen haben. Nur ein Kind gab an, dass ihm/ihr die Mathematik-Workshops nicht so gut gefallen haben (siehe Abbildung 33). Dieses Kind gab als Grund dafür „ALLES!“ an.

Aus Frage 20 und 21 geht hervor, was den Teilnehmer*innen gut bzw. nicht gut gefallen hat. Sehr auffällig ist die Antwort „Dass ein Kind aus einer Gruppe nicht motiviert war und mich ständig ablenkte“. Aus diesem Grund wurde dem Zusammenhang zwischen der zugeteilten Fermi-Aufgaben und dem Zusammenarbeiten in einer Gruppe in den Mathematik-Workshops nachgegangen, da diese Antwort aus der Gruppe Zahnpaste stammte (siehe Zusammenhang Fermi-Gruppe und Gruppenarbeit).
Es kann jedoch hervorgehoben werden, dass die Teilnehmer*innen die Mathematik-Workshops positiv bewerteten. Vor allem wurden Rätsel- und Knobelaufgaben in mehreren Antworten genannt (siehe Frage 20: Was gefiel dir an den Mathematik-Workshops? Und Frage 21: Was gefiel dir nicht an den Mathematik-Workshops?).

6.3.5. Gruppenarbeit

Im Verlauf des Mini Talente Clubs wurde mehrmals explizit nach der Gruppenarbeit gefragt. Dabei fällt auf, dass ein Kind nach der ersten Befragung angab, gerne in der Gruppe zu arbeiten und am Ende lieber allein arbeiten würde. Ein weiteres Kind gab genau die gegenteilige Aussage an. Außerdem wechselte ein/eine Teilnehmer*in von der Kategorie „es macht mir nichts aus“ zu „ich arbeite sehr gerne in der Gruppe“.

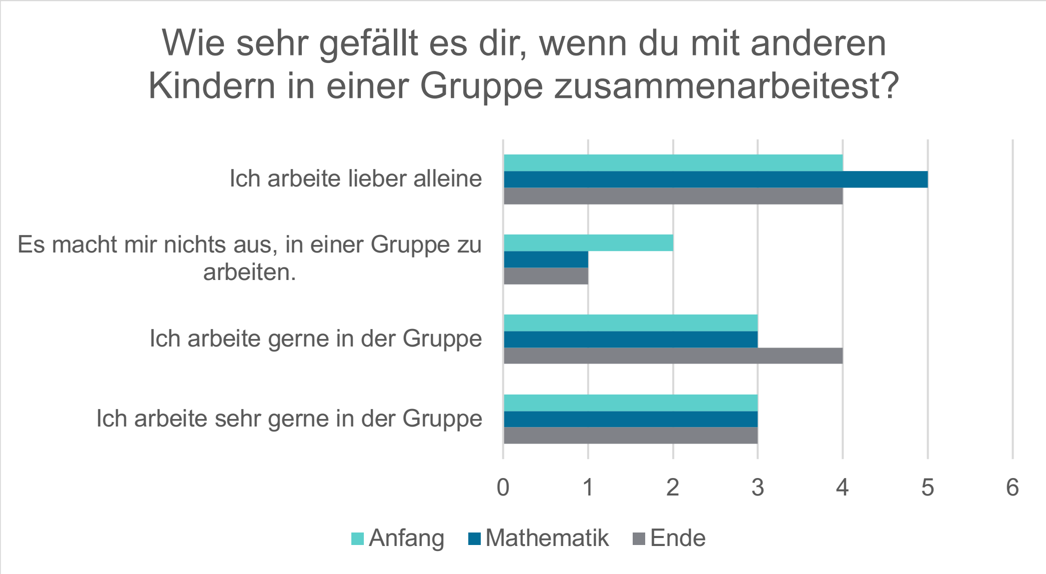


Abbildung 47: Gruppenarbeit im Verlauf des Clubs [n=12]

Es ist anzumerken, dass etwa die Hälfte der Teilnehmer*innen gerne bzw. sehr gerne in Gruppen zusammenarbeiten. Einige Teilnehmer*innen hoben dies noch einmal besonders bei der Frage hervor, was ihnen an den Mathematik-Workshops gefallen hat. Insgesamt ist wenig Veränderung in Bezug auf die Vorliebe für Gruppenarbeiten festzustellen.

6.3.6. Erwartungen

In Abbildung 48 ist zu sehen, dass die Erwartungen zum Großteil erfüllt worden sind. Die Angaben der Teilnehmer*innen stimmen auch mit den angegebenen Erwartungen zu Beginn des Clubs überein. Jene, die „Pflanzen bzw. Natur anschauen“ angegeben haben, gaben am Ende des Mini Talente Clubs auch an, dass ihre Erwartungen nicht vollständig erfüllt worden sind.

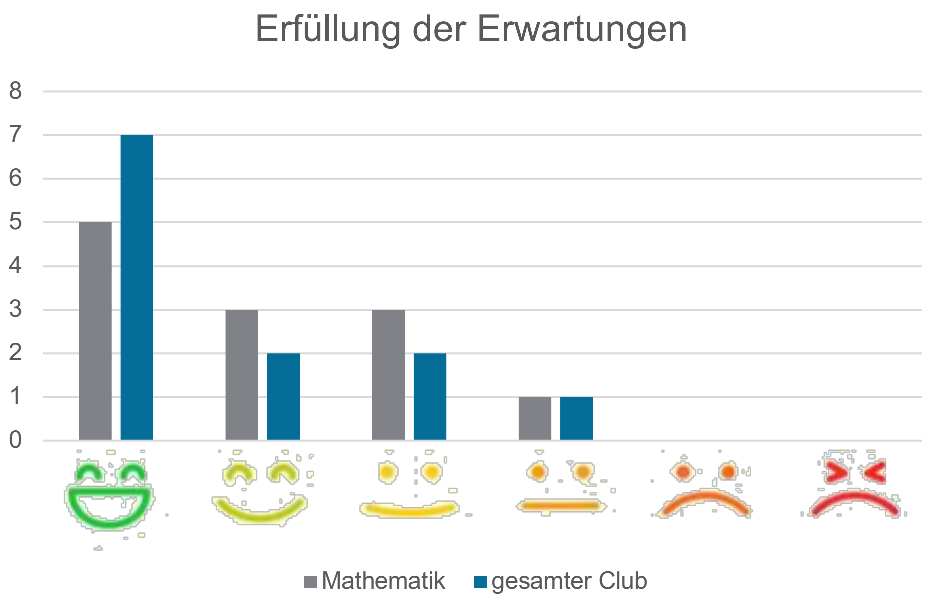


Abbildung 48: Erfüllung der Erwartungen [n=12]

6.3.7. Zusammenhang Fermi-Gruppe und Gruppenarbeit

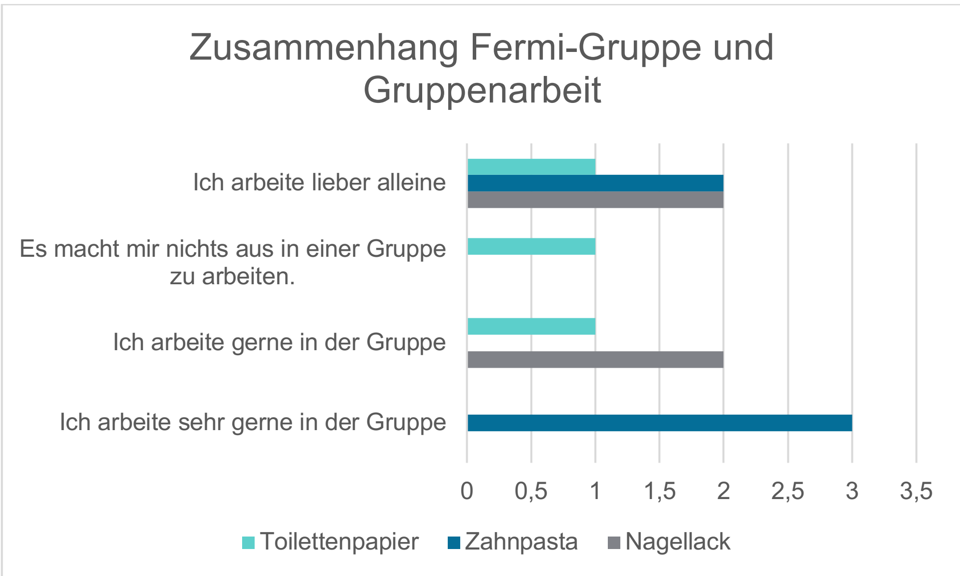


Abbildung 49: Zusammenhang Fermi-Gruppe und Gruppenarbeit [n=12]

Obwohl es in der Gruppe Zahnpasta laut den Antworten ein Problem gegeben hatte, bewerteten die Teilnehmer*innen das Zusammenarbeiten in der Gruppe überwiegend positiv.

In den beiden anderen Gruppe gab es während der Gruppenarbeitsphase keine Probleme, obwohl nicht alle die Gruppenarbeit positiv bewerteten.

7. Schlussfolgerung und Zusammenfassung

Um die Möglichkeiten der Begabungsförderung zu erweitern, wurde der Mini Talente Club als Pull-Out-Programm ins Leben gerufen. Wie sich aus der Theorie zeigte, gibt es noch viele weitere Möglichkeiten, Kinder und junge Erwachsene außerschulisch zu fördern. Zusätzlich zur Förderung lernen die Kinder während des Clubs einen weiteren Lernort, die Universität (tertiäre Ausbildungsstufe), kennen.

Neben den theoretischen Modellen der Hochbegabung wurde zu jedem Workshop der Lehrplan genauer betrachtet. Es stellte sich heraus, dass die mathematische Modellierung (Workshop Fermi-Aufgaben) in allen Lehrplänen im allgemeinen Teil enthalten ist, auch in der Volksschule. Hingegen sind Primzahlen nur als Erweiterung des regulären Lehrplans der Unterstufe vorgesehen.

Aus dem Club in der Praxis kann gesagt werden, dass ein höherer Anteil an Mädchen wünschenswert ist. Eine Idee wäre, dazu einen eigenen Club speziell für Mädchen anzubieten. Durch den hohen Anteil an Gruppenarbeiten während der Workshops wurde eingangs eine Veränderung in Bezug auf die Einstellung zu dieser Arbeitsform erwartet. Dies konnte aber bei der Teilnehmer*innenbefragung nicht bestätigt werden. Insgesamt zeigte die Befragung der Teilnehmer*innen, dass der Club gut angekommen ist und die Erwartungen der Kinder großteils erfüllt wurden. Welche Workshops am besten gefallen haben, hing stark von den Interessen der Kinder ab.

Die Motivation, die Aufgaben sorgfältig zu erledigen, konnte durch die Präsentation der Arbeiten bei einer Abschlussfeier mit den Eltern gesteigert werden. Dabei fand auch eine feierliche Urkundenverleihung statt.

Ein Ziel dieser Diplomarbeit war es unter anderem, die Forschungsfragen aus der Einleitung beantworten zu können: Inwieweit sind Inhalte der Sekundarstufe I mit Hochbegabten der Primarstufe umsetzbar?
Dies Frage lässt sich durch die Umsetzung und Evaluierung bereits beantworten. Durch die Umsetzung des Clubs wurde gezeigt, dass Inhalte aus der Sekundarstufe I (und teilweise noch höher) mit den Hochbegabten gut umsetzbar sind.

Anhand der Arbeitsaufträge und den Gruppenarbeiten in verschiedensten Formen kann auch die zweite Forschungsfrage aus der Umsetzung des Clubs bestätigt werden. Die Arbeitsaufträge waren teilweise aus der Oberstufe direkt übernommen worden. Auffällig dabei war die Herangehensweise der Teilnehmer*innen, die vergleichsweise stark von jenen der älteren Kinder abweicht. Dies liegt in den meisten Fällen am Vorwissen der Teilnehmer*innen. Es wird viel mehr nach Intuition und „Try and Error“ gearbeitet.
Vor allem die Experimente aus den Chemie- und Physik-Workshops regten die Kinder zum Nachmachen zu Hause an. Sie erzählten im nächsten Club, wie die Experimente funktionierten und nahmen Fotos der eigenen Experimente zum nächsten Workshop mit.

Interessant wäre eine Erweiterung des Clubs im Fachbereich Biologie. Weiters könnte eine Forschung in Richtung hybrider Abhaltung (online und präsent) des Club neue Perspektiven öffnen und mehr Reichweite generieren. Durch eine größere Anzahl an Befragten würden manche Ergebnisse von den hier festgestellten abweichen. Dies wäre im Hinblick auf ein umfassendes Hochbegabtenprogramm an der JKU sehr interessant. Außerdem ist es anzudenken, ein Förderprogram von der Primarstufe bis in den tertiären Bildungsbereich zu installieren und so die Begabten längerfristig begleiten und fördern zu können.

8. Literaturverzeichnis

Österreich, R. (5. August 2021). Gesamte Rechtsvorschrift für Bildungsstandards im Schulwesen. *Verordnung der Bundesministerin für Unterricht, Kunst und Kultur über Bildungsstandards [...]*. Wien, Österreich. Abgerufen am 5. August 2021 von https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=20006166

Österreich, R. (18. Mai 2022). Gesamte Rechtsvorschrift für Schulorganisationen. Wien, Österreich.

Österreich, R. (21. Mai 2022). Gesamte Rechtsvorschrift für Schulpflichtgesetz 1985. Wien, Österreich.

ÖZBF. (2020). *Wege in der Begabungsförderung - Eine Methodensammlung für die Praxis* (3. Auflage Ausg.). (R. d. Zweig, Hrsg.) Salzburg: Österreichisches Zentrum für Begabtenförderung und Begabungsforschung.

Büchter, A., Herget, W., Leuders, T., & Müller, J. (2010). *Die Fermi-Box.* Stuttgart: Ernst Klett Verlag GmbH.

Bardy, T., & Bardy, P. (2020). Begabung/Hochbegabung. In T. Bardy, & P. Bardy, *Mathematisch begabte Kinder und Jugendliche. Primarstufe und Sekundarstufe I + II* (S. 11-42). Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Barzel, B., Büchter, A., & Leuders, T. (2015). *Mathematik Methodik - Handbuch für die Sekundarstuffe I und II.* Berlin: Cornelsen.

Baur, N., & Blasius, J. (2014). *Handbuch Methoden der empirischen Sozialforschung.* Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Kultur. (13. September 2012). *Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung.* Abgerufen am 4. August 2021 von www.bmbwf.gv.at: https://www.bmbwf.gv.at/Themen/schule/schulpraxis/lp/lp_vs.html#heading____Allgemeines_Bildungsziel

Greefrath, G. (2018). *Anwendungen und Modellieren im Mathematikunterricht.* Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Greefrath, G., & Schukajlow, S. (April 2018). Wie Modellieren gelingt. *Wie Modellieren gelingt*(207).

Greefrath, G., Kaiser, G., Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2013). Mathematisches Modellieren - Eine Einführung in theoretische und didaktiosche Hintergründe. In R. Borromeo Ferri, G. Greefrath, G. Kaiser, & G. Kaiser (Hrsg.), *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule. Realitätsbezüge im Mathematikunterricht* (S. 11-38). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Haberzettl, N., Klett, S., & Schukajlow, S. (2018). Mathematik rund um die Schule - Modellieren mit Fermi-Aufgaben. In K. Eilerts, K. Skutella, & K. Skutella (Hrsg.), *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht. Realitätsbezüge im Mathematikunterricht* (S. 31-42). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Käpnick, F. (2014). Fachdidaktik Mathematik. In I. P. Education, *Professionelle Begabtenförderung* (S. 99-116). Salzburg: Eigenverlag IPEGE.

Lack, C. (2009). *Aufdecken mathematischer Begabung bei Kindern im 1. und 2. Schuljahr.* Wiesbaden: Vieweg+Teubner | GWV Fachverlage GmbH.

Preckel, F., & Vock, M. (2013). *Hochbegabung - Ein Lehrbuch zu Grundlagen, Diagnostik und Fördermöglichkeiten.* Göttingen: Hogrefe Verlag GmbH & Co. KG.

Republik Österreich. (6. August 2021). Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne – allgemeinbildende höhere Schulen. Wien, Österreich. Abgerufen am 6. 8 2021 von https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568

Republik Österreich. (18. Mai 2022). Gesamte Rechtsvorschrift für Schulunterrichtsgesetz. Wien, Österreich.

Sabitzer, B. (2014). *A Neurodidactical Approach to Cooperative and Cross-curricular Open Learning: "COOL Informatics".* Klagenfurt: Alpen-Adria-Universität.

Sabitzer, B., & Pasterk, S. (2013). *Informatics is COOL: Cross Curricular Concepts for Computer-Supported Open Leranin in Secondary Schools.* Klagenfurt: Alpen-Adria-Universität.

Weilguny, W. M., Resch, C., Samhaber, E., & Hartel, B. (2011). *Weißbuch - Begabungs- und Exzellenzförderung.* (Ö. Z. Begabungsforschung, Hrsg.) Salzburg: Österreichisches Zentrum für Begabtenförderung - ÖZBF.

Wittmann, G. (2020). *Grundbegriffe der elementaren Zahlentheorie.* Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Ziegler, A. (2018). *Hochbegabung.* München: Ernst Reinhardt, GmbH & Co KG.

9. Abbildungsverzeichnis

10. Tabellenverzeichnis

11. Anhang

11.1. Fragebögen

FRAGEBOGEN MINI TALENTE CLUB

Bitte gib hier deinen Identifizierungsode an. ________________________________

Der Code besteht aus den ersten beiden Buchstaben deines Vornamens,
den beiden Zahlen deines Geburtsmonats und
den ersten beiden Buchstaben deines Geburtsorts (LU08LI für Luisa, 22.08.2008, Linz)

Bitte ankreuzen: Bist du ein O Mädchen O Bub

Hast du Geschwister? O Nein O Ja → Wie viele? _______________

In welche Schulstufe gehst du? O 1. O 2. O 3. O 4. O 5.

Welchen Schultyp besuchst du? O Volksschule O Mittelschule
O Gymnasium O Andere: ________________

Warum hast du dir genau diese Veranstaltung aus den Angeboten von Talente OÖ ausgesucht?

____

____

____

____

Was erwartest du vom Mini Talente Club?

____

____

____

____

Was erwartest du von den Betreuer*innen?

Was bedeutet MINT?

Wie sehr gefällt es dir, wenn du mit anderen Kindern in einer Gruppe zusammenarbeitest?

DANKE FÜR DAS AUSFÜLLEN!

FRAGEBOGEN MATHEMATIK-WORKSHOPS

Bitte gib hier deinen Identifizierungscode an. ________________________________

Der Code besteht aus den ersten beiden Buchstaben deines Vornamens, den beiden Zahlen deines Geburtsmonats und den ersten beiden Buchstaben deines Geburtsorts (LU08LI für Luisa, 22.08.2008, Linz)

Was fällt dir spontan zum Block Mathematik ein?

____

Wie hat dir das Angebot der Mathematik-Workshops gefallen?

O sehr gut
O gut
O nicht so gut
O gar nicht
O weiß nicht

Welche Fermi-Aufgabe hast du gelöst? ____________________________________

Was ist das Besondere an Fermi-Aufgaben?

____

____

____

Welche Fermi-Aufgabe hast du gelöst?

O Nagellack O Zahnpasta O Toilettenpapier

Was ist besonders an Fermi-Aufgaben?

____

____

____

Fiel es dir leicht, die Aufgabenstellung zu erfassen?

O sehr leicht
O leicht
→ Half dabei die Gruppenarbeit? O ja O nein O egal
O nicht so leicht
O gar nicht leicht
O weiß nicht

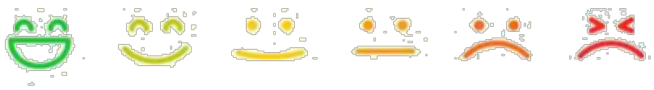
Fiel es dir leicht, einen Lösungsweg für die Aufgabenstellung zu finden?

O sehr leicht
O leicht
O nicht so leicht
O gar nicht leicht
O weiß nicht

Wie sehr gefällt es dir, wenn du mit anderen Kindern in einer Gruppe zusammenarbeitest?
O Ich arbeite sehr gerne in der Gruppe
O Ich arbeite gerne in der Gruppe
O Es macht mir nichts aus in einer Gruppe zu arbeiten
O Ich arbeite lieber alleine

Wie sehr hat dir das kreative Gestalten eines Plakates zur Veranschaulichung des Lösungsweges gefallen?
O sehr gut
O gut
O nicht so gut
O gar nicht
O weiß nicht/egal

Kreise den Smiley an, der aussagt, wie deine Erwartungen an den Mathematik-Block erfüllt worden sind!



Was gefiel dir an den Mathematik-Workshops?

____

____

____

Was gefiel dir nicht an den Mathematik-Workshops?

____

____

____

Hast du Verbesserungsvorschläge fürs nächste Mal?

____

____

____

DANKE FÜR DAS AUSFÜLLEN!

FRAGEBOGEN ABSCHLUSS MINI TALENTE CLUB

Bitte gib hier deinen Identifizierungscode an. ______________________________

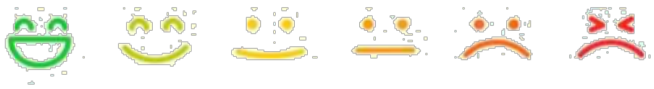
Der Code besteht aus den ersten beiden Buchstaben deines Vornamens,
den beiden Zahlen deines Geburtsmonats und
den ersten beiden Buchstaben deines Geburtsorts (LU08LI für Luisa, 22.08.2008, Linz)

Denke spontan an den Mini Talente Club! Was fällt dir als Erstes dazu ein?

____

____

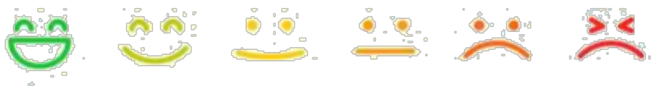
Kreise den zutreffenden Smiley ein! Wie hat dir das Angebot im gesamten Mini Talente Club gefallen?



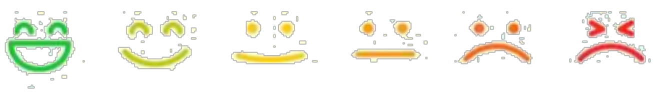
Welches Thema hat dir am besten gefallen?

O Fermi-Aufgaben
O Mathe -Workshop (Primzahlen)
O Informatik-Workshop
(CSI:Informatik)
O Informatik-Workshop (3D-Druck)
O Schnitzeljagd (Campus-Führung)
O Physik-Versuche
O Chemie-Versuche

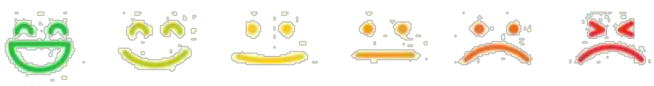
Wie sehr gefällt es dir, wenn du mit anderen Kindern in einer Gruppe zusammenarbeitest?



Kreise den Smiley an, der aussagt, wie deine Erwartungen am Mini Talente Club erfüllt worden sind!



Waren die Aufgabenstellungen für dich immer klar und machbar?



DANKE FÜR DAS AUSFÜLLEN!

11.2. Unterrichtsmaterial

11.2.1. Fermi-Aufgaben:

Übersicht Planung

Inhalt	Dauer	Sozialform	Material
Einführung Fermi	10 min	Plenum	
Einführung Modellierung	5 min	Frontal-unterricht	Beispiel: Wie viele Klavierstimmer gibt es in Chicago?
Sketch und Modellierung	25 min	Plenum	Beispiel: „Wie viele Zahnärzte gibt es in Österreich?“ Teilschritte der Modellierung
Erarbeitung Fermi-Aufgabe (inkl. Besprechung mit Kursleitung und Vorbereitung zur Präsentation)	60 min	Gruppenarbeit	Aufgabenkärtchen Stifte, Papier, …
Präsentation	20 min	Plenum	

Einführungsbeispiel: Wie viele Zahnärzte gibt es in Österreich

Angelehnt an die Erläuterung „Fermi und seine Fragen“ in die Fermi Box (Büchter, Herget, Leuders, & Müller, 2010) wurde die Einführungsaufgabe für den Workshop konzipiert. Dadurch wird auch der erste Teilschritt „Was will ich herausfinden?“ durch die mathematische Modellierung verdeutlicht.

Sketch:

Wie viele Zahnärzte gibt es eigentlich in Österreich?

Keine Ahnung, woher soll ich das wissen?

Hätt mich grad interessiert, da ich demnächst einen aufsuchen muss.

Oje, warum das?

Hab mir beim letzten Mal Nüsse-essen eine „Plombe“ ausgebissen.

Aua, das hat sicher ordentlich wehgetan, oder?

Naja, geht so. Aber den Zahn sollte sich so schnell wie möglich ein Zahnarzt ansehen. Darum bin ich auch auf die Frage gekommen.

Soll ich mal googeln?

Googeln? Ist doch fad, kann man das nicht irgendwie anders herausfinden.

So wie Fermi immer seine Studenten mit diesen komischen Fragen geärgert hat? (schmunzelt dabei)

Ja das würde doch gehen. Probieren wir es mal und schauen, was rauskommt!

Modellierungsvorschlag: Wie viele Zahnärzte gibt es in Österreich

Nachfolgend eine mögliche Modellierung zur obigen Frage. Der Modellierungsschritt „Wie habe ich gerechnet und warum?" wird während dem Erarbeiten mit den Teilnehmer*innen stetig ausgeführt und wird daher nicht mehr extra angeführt. Dieser Modellierungsschritt wird durch die stetige Besprechung im Plenum ergänzt.

Was wollen wir herausfinden?

Anzahl an Zahnärzten in Österreich

Welche Angaben braue ich zum Lösen & Berechnung der Aufgabe

- ☐ Wie viele Menschen gibt es in Österreich? → Annahme

  Etwa 8 000 000

- ☐ Wie oft geht jeder dieser Menschen zum Zahnarzt?

  Etwa **2-mal im Jahr**, einige gar nicht, einige viel öfter!

- ☐ Wie lange dauert ein Termin etwa? → Annahmen

  Im Schnitt **1/2 Stunde**. (Plomben, Zahnreinigung, Kontrollen, ...)

- ☐ Wie viele Stunden arbeitet ein Zahnarzt?

  Wie sind die Öffnungszeiten? → Recherche

Superzahn	Praxis Weißer als Weiß (2 Ärzte)
MO: 13:00 - 17:00 (4 Stunden)	MO: 8:00 - 12:00, 13:30 - 17:00 (7,5 Stunden)
DI: 8:00 - 12:00 (4 Stunden)	DI: 8:00 - 12:00, 13:30 - 17:00 (7,5 Stunden)
MI: 8:00 - 12:00 (4 Stunden)	MI: 8:00 - 12:00, 13:30 - 17:00 (7,5 Stunden)
DO: 13:00 - 17:00 (4 Stunden)	DO: 8:00 - 12:00, 13:30 - 17:00 (7,5 Stunden)
FR: 8:00 - 12:00 (4 Stunden)	FR: 8:00 - 12:00, 13:30 - 17:00 (7,5 Stunden)
Gesamt: (20 Stunden)	SA: 8:00 - 12:00 (4 Stunden)
	Gesamt: (41,5 Stunden)

Wie lange arbeiten Zahnärzte im Durchschnitt?

Im Durchschnitt $\frac{(20+41,5)}{2} = \frac{61,5}{2} = 30,75\ \mathit{Stunden}$ (ca. **20 Stunden**)

Wie viele Arbeitswochen hat ein Zahnarzt?

Bei 6 Wochen Urlaub:

52 Wochen/Jahr - 6 Wochen Urlaub = **46 Wochen**

30* 45 = **1350 Stunden im Jahr**

☐ Wie viele Zahnärzte können den Bedarf decken?

Folgende Abschätzung ist dazu notwendig:

Man benötigt also etwa *8 000 000 . 2 . 1/2 = 8 000 000 Stunden*

Das können wie viele Zahnärzte bewältigen?

8 000 000 : 1350 = ca. 5714 Zahnärzte

Was bedeutet mein Ergebnis?

Ca. 5700 Zahnärzte werden in Österreich arbeiten, um den Bedarf zu decken lt. Annahme

Arbeitsblatt: Teilschritte der Modellierung

Für die Fermi-Aufgaben gibt es eine besondere Vorgehensweise.

Halte folgende Reihenfolge der Arbeitsschritte immer ein! Bei Fragen wende dich an die Kursleiter*innen.

Verwende für die Berechnungen deiner Fermi-Aufgabe einen eigenen Zettel.

☐ Was will ich herausfinden?

____

☐ Welche Angaben brauche ich zum Lösen?

____

____

☐ Berechnung der Aufgabe! Verwende dazu ein eigenes Blatt!

☐ Was bedeutet mein Ergebnis?

____

____

☐ Kann meine Lösung stimmen? Überprüfe mittels Recherchen!

____

____

☐ Wie habe ich gerechnet und warum? Besprich dein Vorgehen mit deiner Gruppe!

☐ Besprechen der Ergebnisse! → im Plenum

11.2.2. Sieb des Eratosthenes

Übersicht Planung

Inhalt	Dauer	Sozialform	Material
Einführung natürliche Zahlen ℕ Unterschied Ziffer – Zahl Definition Vielfache - Teiler	15 min	Plenum	Arbeitsblatt „Zahlenrätsel“
Zahlenrätsel Drei Stellen	15 min	Einzelarbeit	Arbeitsblatt „Drei Stellen“
Vielfache der Ziffern	40 min	Ich-Du-Wir	100er Tafel
Präsentation	30 min	Plenum	
Zahlenrätsel	5 min	Einzelarbeit	Arbeitsblatt „Zahlenrätsel“
Sieb des Eratosthenes Verwendung von Primzahlen	15 min	Plenum	100er Tafel

Arbeitsblatt „Drei Stellen“

Suche dir eine **geheime 3-stellige Zahl** aus! Verrate sie keinem! ____________________

Schreibe deine geheime Zahl zweimal hintereinander! ____________________

Nun sollte deine Zahl sechsstellig sein.

Teile diese 6-stellige Zahl nun durch 7:

Teile das Ergebnis nun durch 11:

Teile nun das letzte Ergebnis durch 13:

Dein Endergebnis lautet: __________________ → Wie geht das?

JOHANNES KEPLER
UNIVERSITÄT LINZ

Lösung & Erklärung „Drei Stellen“

Suche dir eine **geheime 3-stellige Zahl** aus! Verrate sie keinem! ____123____

Schreibe deine geheime Zahl zweimal hintereinander! ____133123____

Nun sollte deine Zahl sechsstellig sein.

Teile diese 6-stellige Zahl nun durch 7:

123123 : 7 = 17589
 5 3
  4 1
   6 2
    6 3
     0

Teile das Ergebnis nun durch 11:

17589 : 11 = 1599
 6 5
  98
   99
    0

Teile nun das letzte Ergebnis durch 13:

1599 : 13 = 123
 29
  39
   0

Dein Endergebnis lautet: ____123____

→ Wie geht das?

Multipliziert man 7 mit 11 und 13 so erhält man 1 001. $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1\,001$

Durch das zweimalige nebeneinander schreiben zu Beginn des Rätsels erhält man das Produkt der drei Faktoren. $xyz \cdot (7 \cdot 11 \cdot 13) = xyz\ xyz$

$xyz \cdot 1\,001 = xyz\ xyz$

z. B.:

$1\,000 \cdot 123$	=	$123\,000$
$1 \cdot 133$	=	133
$1\,001 \cdot 123$	=	$123\,133$

Dividiert man die sechsstellige Zahl nun durch die Faktoren (7, 11, 13) erhält man wieder die **ursprüngliche geheime Zahl**.

Arbeitsblatt „Zahlenrätsel“

Zusammenhang von Ziffer und Zahl:

____

____

Vielfache:

Sind a und b natürliche Zahlen und q eine ganze Zahl, dann heißt b ein Vielfaches von a, wenn b = q · a gilt.

Aufwärmen:

Wie erhalten wir die Zahlen 10, 11, 12,...

10 = ___ · 10 + ___ · 1

11 = ___ · 10 + ___ · 1

12 = ___ · 10 + ___ · 1

27 = ___ · 10 + ___ · 1

43 = ___ · 10 + ___ · 1

98 = ___ · 10 + ___ · 1

56 = ___ · 20 + ___ · 2

Teiler:

Sind t und z natürliche Zahlen mit t ≠ 0 und z ≠ 0, dann gilt:

Die Zahl t ist ein Teiler der Zahl z, wenn bei der Division z : t kein Rest beleibt.

Man schreibt t|z. 1 und z werden als unechte Teiler bezeichnet. Alle weiteren Teiler sind echte Teiler der Zahl z.

Zusammenhang Vielfache und Teiler:

Ist t ein Teiler von z, dann ist z ein Vielfaches von t.

1. Zahlenrätsel:

   Ich bin eine zweistellige Zahl.

   Die Summe meiner Ziffern ist 11.

   Ich bin ein Vielfaches von 4 und 7.

   Welche Zahl bin ich?

2. Zahlenrätsel:

   Ich bin eine zweistellige Zahl.

   Ich bin ein Vielfaches von 19.

   Die Summe meiner Ziffern ist 14.

   Welche Zahl bin ich?

3. Zahlenrätsel:

   Ich bin eine zweistellige Zahl.

   Ich bin ein Vielfaches von 4, 6, und 7.

   Welche Zahl bin ich?

Lösungen „Zahlenrätsel“

Zusammenhang von Ziffer und Zahl:

Jede Ziffer ist eine Zahl, aber nicht jede Zahl ist eine Ziffer!

Ziffern: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Aufwärmen:

Wie erhalten wir die Zahlen 10, 11, 12,...

10 = 1 · 10 + 0 · 1

11 = 1 · 10 + 1 · 1

12 = 1 · 10 + 2 · 1

27 = 2 · 10 + 7 · 1

43 = 4 · 10 + 3 · 1

98 = 9 · 10 + 8 · 1

56 = 5 · 10 + 6 · 1

1. Zahlenrätsel:
   - ☐ Suche alle zweistelligen Vielfachen von 7 (bis 100):
     14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98
   - ☐ Bei welchen dieser Zahlen ist die Ziffernsumme gleich 11?
     56
   - ☐ Ist die gefundene Zahl auch ein Vielfaches von 4? 14 · 4 = 56
   - ☐ Die gesuchte Zahl ist 56.
2. Zahlenrätsel:
   - ☐ Suche alle zweistelligen Vielfachen von 19 (bis 100):
     19, 38, 57, 76, 95
   - ☐ Bei welchen dieser Zahlen ist die Ziffernsumme gleich 14?
     95

     Die gesuchte Zahl ist 95.
3. Zahlenrätsel:
   - ☐ Suche alle zweistelligen Vielfachen von 7 (bis 100):
     14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98
   - ☐ Bei welchen dieser Zahlen handelt es sich auch um Vielfache von 4?
     28, 56, 84
   - ☐ Welche dieser gefundenen Zahlen ist auch ein Vielfaches von 6? 14 · 6 = 84
   - ☐ Die gesuchte Zahl ist 84.

JOHANNES KEPLER UNIVERSITÄT LINZ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100